

# CONTRASTES

*Revista Internacional de Filosofía*

Volumen XII (2007) • ISSN: 1136-4076

## SUMARIO

### ESTUDIOS

- Susan Haak* La integridad de la ciencia: significado e importancia  
*Jesús Alcolea* Razonamientos no rigurosos y demostraciones  
*Rafael Cejudo* El debate entre P. Pettit y A. Sen sobre la libertad  
*Antonio Diéguez* La relatividad conceptual y el problema de la verdad:  
*Ricardo A. Espinoza* Deleuze y Zubiri...en torno a una lógica de la  
impresión  
*Javier Franzé* La polémica de Strauss y Voegelin con Max Weber  
*José García Leal* La condición simbólica del arte  
*M<sup>a</sup> T López de la Vieja* Los argumentos resbaladizos. El uso práctico  
*Angel Puyol* Filosofía del mérito

### DEBATES

- M<sup>a</sup> Luz Pintos* Gurwitsch, Goldstein, Merleau-Ponty. Análisis de una  
estrecha relación

### NOTAS

- Roberto Augusto* La antropología filosófica de Schelling  
*Antolín Sánchez Cuervo* El humanismo de Eduardo Nicol en su Centenario  
*Alicia Villar* Muerte y pervivencia en Unamuno

### MATERIALES DE INVESTIGACION

- Gemma Muñoz-Alonso* Anatomía de la investigación filosófica: claves  
prácticas para la elección del tema

### INFORME BIBLIOGRAFICO

- Juan Carlos Velasco* Un solo mundo o la perspectiva de la justicia

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

# *Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador*

JESÚS ALCOLEA BANEGAS\*  
*Universitat de València*

Recibido: 12-03-2006. Aprobado definitivamente: 27-02-2007

## RESUMEN

Presentamos la contribución de Th. Tymoczko a la filosofía de la matemática y analizamos y evaluamos las demostraciones asistidas por ordenador y los razonamientos no rigurosos en la matemática experimental, con particular referencia al Teorema de los Cuatro Colores.

## PALABRAS CLAVE

TYMOCZKO – CUASI-EMPIRISMO – MATEMÁTICA EXPERIMENTAL – RAZONAMIENTO NO RIGUROSO – DEMOSTRACIONES ASISTIDAS POR ORDENADOR

## ABSTRACT

We present Th. Tymoczko's contribution to the philosophy of mathematics, and we analyze and evaluate the computer-assisted proofs and the non-rigorous reasonings in the experimental mathematics, particularly in reference to the Four-Colour Theorem.

## KEYWORD

TYMOCZKO – QUASI-EMPIRICISM – EXPERIMENTAL MATHEMATICS – NON-RIGOROUS REASONING – COMPUTER-ASSISTED PROOF

## I. INTRODUCCIÓN

EN EL AÑO 2006 SE CUMPLEN 30 AÑOS de la obtención de la primera demostración asistida por ordenador de la famosa conjetura de los cuatro colores, y se cumplen 10 años de la muerte del filósofo A. Thomas Tymoczko<sup>1</sup>, que intentó

1 Tom Tymoczko nació en New Kesington, PA, el 1 de septiembre de 1943 y murió en Northampton, MA, el 8 de agosto de 1996. Estudiante en las Universidades de Harvard y

extraer las consecuencias filosóficas que podían seguirse de ese logro matemático. En este trabajo, intentamos poner en perspectiva la obra de este filósofo y dar cuenta del significado de las demostraciones asistidas por ordenador y de otros problemas derivados, con el fin de contextualizar la traducción que ofrecemos a continuación del ensayo que Tymoczko dedicó al tema.

## II. LA CONTRIBUCIÓN FILOSÓFICA DE TH. TYMOCZKO

Tymoczko dedicó sus reflexiones a la lógica, la epistemología, la filosofía de la mente, pero sobre todo y fundamentalmente a la filosofía de la matemática. Planteó a esta especialidad filosófica algunas cuestiones que son básicas para la moderna filosofía de la ciencia y ayudó a fijar nuevas formas de examinar la matemática a partir de la propia actividad de los matemáticos. En este sentido, su contribución más notable ha consistido en delinear el *cuasi-empirismo* como un enfoque coherente para el estudio de la naturaleza de la matemática y bajo la influencia del imperativo cuasi-empirista de las obras de I. Lakatos y H. Putnam.

En sus ensayos, Tymoczko acentuaba la importancia de la «experiencia» matemática y presentaba argumentos positivos y convincentes a favor de su caracterización del cuasi-empirismo. Para ello se servía de los instrumentos formales tradicionalmente asociados a la filosofía de la matemática y de algunos otros que tomaba prestados de las disciplinas empíricas, la historia, la sociología y la ciencia de la computación. Todo ello quedó claramente reflejado en el carácter interdisciplinar de los textos que supo recoger en una celebre antología que editó en 1985<sup>2</sup>. Sus resultados vinieron acompañados de nuevos y estimulantes conocimientos que los matemáticos podían reconocer como ciertos y los filósofos como una explicación sustanciosa de la naturaleza de la matemática. Como a él mismo le gustaba indicar, su investigación sobre ésta ha tenido lugar sobre cómo se practica realmente y no sobre cómo debería ser según ideas preconcebidas.

Su nombre siempre ha estado particularmente asociado a las consideraciones filosóficas sobre las demostraciones matemáticas asistidas por ordenador<sup>3</sup>,

---

Oxford, se doctoró en Filosofía por la primera en 1972. Entre otros honores, fue miembro del consejo editorial de la revista *Philosophia Mathematica*.

2 Th. Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology*, Basel: Birkhäuser, 1985; 2ª edición revisada y ampliada en Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998.

3 Th. Tymoczko, «The Four-Color Problem and its Philosophical Significance», *The Journal of Philosophy*, 76 (1979), n. 2, pp. 57-83, y reimpresso en la antología Th. Tymoczko, (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, pp. 243-266.

que para él constituían evidencia suficiente a favor de una filosofía cuasi-empirista, y dado que fue el primero en observar la importancia filosófica del cambio metodológico representado por la demostración del Teorema de los Cuatro Colores (en lo sucesivo, T4C). En este contexto sugería, basándose en ideas de Wittgenstein, que los procedimientos de demostración en la matemática tienen tres rasgos distintivos: son *convincentes* (para un matemático cualquiera), son *formalizables* (es decir, son representables como sucesiones finitas de deducciones a partir de los axiomas de alguna teoría) y son *escrutables* (*surveyable*)<sup>4</sup> (en el sentido de que los miembros de la comunidad matemática pueden comprobarlas). Las demostraciones son convincentes para los matemáticos porque pueden ser formalizadas y escrutadas. En la medida en que la verificación de los programas con la máquina tiene la capacidad de satisfacer los desiderata de formalizabilidad y de escrutabilidad, sus resultados (replicados con éxito) deberían constituir evidencia a favor de su corrección. Por supuesto que ello no altera su carácter inductivo. Pero sería estúpido dudar de la importancia de los ordenadores al extender nuestras facultades de razonamiento, del mismo modo que los telescopios, los microscopios y otras innovaciones han extendido nuestras facultades sensoriales. Después de todo, la verificación de los programas también podría ser publicada (del mismo modo que las demostraciones son publicadas) con objeto de estar sujetos a la crítica de la comunidad. En un ensayo de 1980<sup>5</sup>

4 Según *The New Elisabethan Reference Dictionary* (London: George Newnes, 1956), *to survey* es un verbo transitivo procedente del anglofrancés, *surveier* (de *sur-*, del francés antiguo *veir*, y del latín *videre*, ver) y significa: estudiar, examinar, tener una visión general de algo, ver con ojo escrutador; examinar minuciosamente; examinar y determinar la condición, valor, etc. de algo; inspeccionar, mirar, reconocer, recorrer, registrar, etc. Tymoczko toma el término de la versión inglesa de la obra de L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics. Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Oxford: Blackwell, 1956, reimpresión de 1964. Traducimos el verbo *to survey* (y su derivado *surveyable*) por «escutar» («escrutable»), que tiene el significado de «indagar, examinar cuidadosamente, explorar» (DRAE) y también el de «escudriñar o mirar una cosa con mucha atención para descubrir algo en ella» (María Moliner), porque, como Wittgenstein deja claro en su obra, para decir que una demostración es tal debemos ser capaces de reconocerla, de recorrerla y de examinarla minuciosamente, para poder decir al final: así tiene que ser. Pero, además, ««La demostración ha de ser escrutable [übersehbar]» significa propiamente no otra cosa que: la demostración no es un experimento. No aceptamos el resultado de una demostración porque ha resultado así una vez, ni porque resulta así a menudo. Sino que vemos en la demostración la razón para decir que *tiene que* resultar así» (*Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza, 1987, p. 140. El traductor de esta obra al español, I. Reguera, vierte «übersehbar» como «abarcable»).

5 Th. Tymoczko, «Computers, Proofs and Mathematicians: A Philosophical Investigation of the Four-Color Proof», *Mathematics Magazine*, 53 (1980), pp. 131-138. Véase además Th.

ofrecía, además, las siguientes recomendaciones para reformar desde el punto de vista cuasi-empirista la epistemología de la matemática:

- (1) Es preciso descartar la imagen de que los matemáticos trabajan aisladamente: El conocimiento matemático es conocimiento público, es decir, el conocimiento de una comunidad de matemáticos. Al reconocer precisamente esto, la comunidad permite que se reconozca a su vez que la comunicación entre los matemáticos constituye la esencia del hacer matemático y sienta las bases del conocimiento matemático.
- (2) Es preciso descartar la imagen de que los matemáticos son infalibles. Los resultados matemáticos pueden estar sujetos a error y son corregibles y, por lo mismo, el conocimiento matemático. El reconocimiento de la naturaleza falible de este conocimiento nos permitirá reconocer los mecanismos mediante los cuales los matemáticos trabajan individualmente y en comunidad para minimizar los errores.
- (3) Una vez se haya reconocido que la matemática es falible, habrá menos dificultad en admitir instrumentos (por ejemplo, ordenadores) como ingredientes del conocimiento matemático y auxilio en las demostraciones. Los instrumentos matemáticos podrían facilitar la entrada del marco cultural y físico de la comunidad matemática en la epistemología.
- (4) Frente a la epistemología reduccionista, el horizonte de la epistemología se puede ampliar reconociendo que, por un lado, la riqueza del discurso matemático –problemas, conjeturas, hipótesis, lemas, la crítica, las demostraciones, etc.– es necesaria para describir la comunicación matemática, y, por otro, los focos de conocimiento no son a veces los enunciados matemáticos sino las teorías e incluso las ramas de la matemática. De este modo, es preciso considerar de una manera más seria las diversas relaciones entre los matemáticos y las diversas teorías que se están desarrollando simultáneamente.
- (5) La epistemología debería concentrarse sobre el propio desarrollo matemático e intentar explicar el proceso de aprendizaje matemático, porque el papel de éste es fundamental en la creatividad y en la transmisión de conocimientos.

Estas sugerencias guiaron la propia labor de Tymoczko y le llevaron hacia una epistemología más realista, que no le impidió, incluso, ofrecer una respuesta

---

Tymoczko, «Computer Use to Computer Proof», *Two-Year College Mathematics Journal*, 12 (1981), nº 2, pp. 120-125.

al dilema de Benacerraf<sup>6</sup>. De acuerdo con ésta, no hay una diferencia esencial entre el conocimiento de objetos abstractos y el conocimiento de objetos concretos. Por ello, no hay ningún problema epistemológico específico y la solución no se ve envuelta por el platonismo. Para ello, Tymoczko reconcilia ideas de Frege y Mill y, basándose en un argumento de Quine<sup>7</sup>, defiende que todos los objetos son objetos abstractos. Los objetos físicos (y si la física describe todo lo que hay, todos los objetos son objetos físicos) son abstractos porque así lo dice la física (son indistinguibles de los objetos matemáticos), por razones de economía (basta con un universo de conjuntos) y porque hay un isomorfismo del universo real en un espacio euclidiano cuatridimensional. Finalmente, invirtiendo una metáfora de Dummett<sup>8</sup> sobre la existencia matemática, concluye que los objetos abstractos se hacen físicos cuando los observamos.

Estas observaciones nos permiten reconocer que Tymoczko forma parte de una tradición «disidente»<sup>9</sup> multidisciplinar y emergente en la filosofía de la matemática, que amplía sus perspectivas hasta incluir aspectos históricos y metodológicos, y que cuenta además con los nombres de Putnam, Davis, Hersh<sup>10</sup>, Kitcher, Wang, entre otros<sup>11</sup>. Todos comparten la idea de que el conocimiento matemático es falible y cuasi-empírico y que, por tanto, en matemáticas (como en la ciencia y en otras áreas del conocimiento humano), los contextos de descubrimiento y justificación se compenetran. Por ello, es legítimo tratar los aspectos sociales y culturales en filosofía de la matemática, pues juegan un papel esencial en la naturaleza del conocimiento y en su transmisión, esto es, en la propia enseñanza y aprendizaje de la matemática. Hablando precisamente de este contexto de ampliación y reconceptualización de la matemática en una

6 Cfr. P. Benacerraf, «Mathematical Truth», *The Journal of Philosophy*, 70 (1973), pp. 661-679; y Th. Tymoczko, «Mathematics, Science and Ontology», *Synthese*, 88 (1991), pp. 201-228.

7 Cfr. W. V. O. Quine, «Whither Physical Objects?», en R. S. Cohen *et alii* (eds.), *Essays in Memory of Imre Lakatos*, Dordrecht: Reidel, 1976, pp. 497-504.

8 Cfr. M. Dummett, «Truth», en *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth, 1978, pp. 1-24.

9 De acuerdo con el término *maverick* introducido por Ph. Kitcher. Cfr. Ph. Kitcher y W. Aspray, «An Opinionated Introduction», en W. Aspray y Ph. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 1988, pp. 3-57.

10 Al editar una obra reciente (R. Hersh (ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Berlin: Springer, 2006), Hersh señala la importancia de las contribuciones de un buen número de autores a esta corriente. Para un análisis y evaluación, puede verse también J. Alcolea, «Un intento de aproximar las tradiciones en Filosofía de la Matemática», *Diálogo filosófico* (pendiente de publicación).

11 Cfr. la mencionada antología de Tymoczko.

conferencia<sup>12</sup> leída en la Universitat de Valencia dos meses antes de su muerte, Tymoczko señalaba cómo la tradición pone el acento sobre lo que sabemos sobre la matemática y deja al margen la forma de comunicar y enseñar ese conocimiento. Por ello, le parecía una ironía que los filósofos y los matemáticos digan tan poco sobre la enseñanza de la matemática, cuando forman la elite de las profesiones que vive en gran medida de la enseñanza.

En «El problema de los cuatro colores y su significado filosófico», Tymoczko describe la demostración asistida por ordenador del T4C y analiza sus implicaciones filosóficas. El principal argumento del ensayo es que la aceptación de este tipo de demostración en matemáticas fuerza a los filósofos a asumir una concepción cuasi-empirista de la matemática. Partiendo de la idea wittgensteiniana de que una demostración debe ser escrutable, como ya hemos indicado, Tymoczko señala que la demostración del T4C «introduce experimentos empíricos en las matemáticas», de modo que «no es una demostración tradicional, no es una deducción a priori de un enunciado a partir de premisas», sino una demostración con una laguna que ha quedado rellena con «los resultados de un experimento bien ideado». Tymoczko infiere de ello que el T4C es «la primera proposición matemática conocida a posteriori» con lo que queda abierta la posibilidad de distinguir la matemática de la ciencia natural, y abona la idea de que la demostración tiene mucho en común con un experimento físico, que su validez no es absoluta y que descansa sobre los mismos fundamentos que la experimentación repetible, pues nuestro conocimiento está «cualificado por la incertidumbre de nuestros instrumentos, ordenador y programa»<sup>13</sup>. Así que, por primera vez en la historia, los argumentos no deductivos contarían como demostraciones matemáticas o, si no cuentan como tales, quedaría confirmado que la matemática acepta razonamientos no rigurosos.

Algunos filósofos y matemáticos reaccionaron de forma diversa discutiendo las propuestas de Tymoczko. Una de las tesis más discutidas fue precisamente que «el T4C es la primera proposición matemática conocida a posteriori». La crítica reaccionó de dos modos: (a) Se señaló que la tesis era válida, pero no novedosa, pues la matemática había sido siempre cuasi-empírica y, por tanto, en su seno ya había elementos empíricos y, así, proposiciones conocidas a posteriori<sup>14</sup>. (b) Se negó que el T4C fuese conocido sólo a posteriori y se ofreció

12 Publicada como Th. Tymoczko, «¿Nuevas direcciones en filosofía de la matemática?», *Agora*, 16 (1997), pp. 123-137.

13 «The Four-Color Problem and its Philosophical Significance», pp. 58 y 77-78.

14 Cfr. Ph. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York: Cambridge University Press, 1983, p 46. Para Kitcher, no hay mucha diferencia entre las demostraciones asistidas por ordenador y las demostraciones largas, de modo que aquellas no pasan de ser «una nueva variación sobre un viejo tema» (Volveremos más adelante sobre este punto). Por lo demás, el propio Tymoczko pone de relieve en su ensayo y en su antología que pensadores

una reinterpretación de la demostración con el fin de que fuera consistente con la concepción apriorista del conocimiento matemático<sup>15</sup>. En esta línea, se propuso que las demostraciones asistidas por ordenador podían transformarse en demostraciones al uso añadiendo un nuevo axioma<sup>16</sup>, pero sin especificar tal axioma, o considerar que el ordenador es como un matemático que realmente sabe que el T4C ha sido demostrado deductivamente. Además de extravagante, esta propuesta<sup>17</sup> olvida que el ordenador ha demostrado un lema (de reducibilidad), que no puede ser examinado por un ser humano y que, en todo caso, las capacidades del ordenador en cuanto a computación son superiores a las de un ser humano. Otro crítico<sup>18</sup> señalaba que, al extender los matemáticos sus capacidades de examen con el ordenador, no se había variado el concepto de demostración, ni que, por ello, el conocimiento matemático se pareciera al

---

anteriores a él ya habían llamado la atención sobre el carácter aposteriorista del conocimiento matemático. Recientemente, T. Burge ha intentado responder al empirismo que, en su opinión, parece haber dominado al pensamiento sobre el conocimiento. Esa dominación, que para él posee una base muy pobre y, por ello, fracasará, se ha mostrado complaciente con los aspectos más vulnerables del empirismo y ha ignorado los recursos racionalistas. Entre estos recursos, la fuerza de nuestra garantía para creer determinadas proposiciones deriva de la razón y no de la experiencia sensible. Desde este punto de vista, Burge trata de analizar si la confianza en un ordenador puede por sí misma afectar a las razones que alguien puede tener para creer que un teorema es a priori. En este contexto, sin embargo, considera que la posición de Tymoczko es plausible (Cfr. T. Burge, «Computer Proof, A Priori Knowledge, and Other Minds», en J. E. Tomberlin (ed.), *Philosophical Perspectives, 12, Language, Mind, and Ontology*, Oxford: Blackwell, 1998, pp. 1-37).

15 E. R. Swart, «The Philosophical Implications of the Four-Color Problem», *American Mathematical Monthly*, 87 (1980), pp. 697-707. Para otra crítica, véase J. Alcolea, «El Teorema de los Cuatro Colores y la Epistemología de la Matemática», *Quaderns de Filosofia i Ciència*, 23-24 (1991), pp. 121-128.

16 M. R. Levin, «On Tymoczko's Arguments for Mathematical Empiricism», *Philosophical Studies*, 39 (1981), pp. 79-86. Esta autora concluía que, puesto que no se había producido ningún cambio en el tipo de computaciones, los ordenadores no introducían ninguna revolución epistemológica en matemáticas. En una línea parecida, y a pesar de algunas extravagancias («el uso de ordenador no introduce nuevos elementos en comparación con el uso del papel y la tinta»), un ensayo que simpatiza con las ideas de Tymoczko es W. A. Verloren van Themaat, «The Own Character of Mathematics Discussed with Consideration of the Proof of the Four-Color Theorem», *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, 20 (1989), n. 2, pp. 340-350.

17 I. Krakowski, «The Four Color Problem Reconsidered», *Philosophical Studies*, 38 (1980), pp. 91-96. Parece que el olvido del lema ha llevado a otro crítico a sostener que podría defenderse que una demostración asistida por ordenador podría ser a priori y escrutable. Nos referimos a Th. Messenger, «Berkeley and Tymoczko on Mystery in Mathematics», en C. M. Turbayne (ed.), *Berkeley. Critical and Interpretative Essays*, Manchester: Manchester University Press, 1982, pp. 83-91.

18 P. Teller, «Computer Proof», *The Journal of Philosophy*, 77 (1980), pp. 797-803.



conocimiento de las ciencias naturales. Otros dos críticos<sup>19</sup>, identificando la matemática anterior a la intervención de los ordenadores con los elementos clave de la teoría de la computación (algoritmos, programas, etc.), defendieron que los ordenadores eran explicables en términos de esos elementos. Sin embargo, todos se olvidaban de apuntar a la cuestión clave: ¿a priori o cuasi-empírico?

A pesar de las críticas aprioristas, y con independencia de que la heurística matemática se parezca bastante a la heurística científica, como ya había indicado Lakatos, la interpretación cuasi-empirista que Tymoczko hace del T4C es más plausible. Ello viene apoyado por la evidencia experimental y corregible que ha acompañado al T4C desde su obtención y como después veremos. En este sentido, el ensayo de Tymoczko proporcionaba adicionalmente elementos suficientes para permitirnos fijar las condiciones bajo las cuales aceptar como válida una demostración asistida por ordenador, y ello con independencia de las posiciones que pudieran adoptar los matemáticos, posiciones con las cuales Tymoczko era escrupulosamente respetuoso.

### III. LA MATEMÁTICA EXPERIMENTAL Y EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

En el último cuarto del siglo XX la matemática parece haber empezado a cambiar hacia algo que podría llamarse *tecnomatemática*. Es cierto que los resultados matemáticos poseen una continuidad histórica en el sentido de que los logros griegos mantienen su vigencia, aunque hayan podido cambiar sus significados o la forma que ahora tenemos de entenderlos. Suele decirse que esos resultados quedan para siempre y que los nuevos estudiosos de las matemáticas siguen nutriéndose de ellos. Con todo, en el siglo pasado se ha ido apreciando un cambio en el *modus operandi* de los matemáticos. La aparición de la tecnología informática ha permitido a los matemáticos hacer uso de ordenadores muy potentes para llevar a cabo, en general, *experimentos* matemáticos y, en particular, resolver problemas o demostrar teoremas bien sea de modo automático, es decir, confirmando o verificando resultados ya obtenidos por los matemáticos, bien sea asistiendo a éstos de forma decisiva e indispensable para obtener sus resultados.

Al principio los ordenadores tuvieron un uso como máquinas calculadoras sin par, lo cual resulta bastante comprensible en una sociedad tecnologizada. Sin embargo, en relación con el pensamiento matemático, que es más teórico, estos avances tecnológicos significaron bien poco. La aparición de ordenadores con gran capacidad de almacenamiento, cálculos rapidísimos y diseño gráfico

19 M. Detlefsen y M. Luker, «The Four-Color Theorem and Mathematical Proof», *The Journal of Philosophy*, 77 (1980), pp. 803-820.

de gran resolución ha impulsado cambios tan profundos que ha llegado a ser posible utilizar un ordenador como un instrumento experimental. Los objetos y fenómenos que interesan a los matemáticos cobran ahora una nueva dimensión ante las respuestas que pueden ofrecer los ordenadores. Pero algunos problemas abordados con el auxilio de ordenadores todavía resisten, como sucede con la hipótesis de Riemann, mientras que otros, como el último teorema de Fermat, han acabado por rendirse al abordaje de los matemáticos.

Sabemos, no obstante, que los experimentos pueden ser defectuosos. La historia de las matemáticas ilustra cómo los planteamientos experimentales han sido bastante comunes cuando los matemáticos se entregaban con lápiz y papel a la búsqueda de resultados matemáticos por medio de experimentos más o menos ingeniosos, que generaban ideas, conjeturas, problemas, soluciones, etc. no siempre exentas de errores. La llegada de los ordenadores supone que la posibilidad de multiplicar estos experimentos crece exponencialmente no sólo en cuanto al número, sino en cuanto a la complejidad. Hay programas que realizan cálculos simbólicos con una precisión mayor que la que puede alcanzar un matemático de carne y hueso. Y hay programas que han podido procesarse en un ordenador llevando a cabo una demostración que se resistía a la mano del matemático. El primer ejemplo espectacular fue la demostración del T4C.

Desde la obtención de esta demostración, los matemáticos se han dedicado a poner bastante más el acento en el uso de cálculos experimentales que acaban publicándose, aunque falten demostraciones rigurosas. Es obvio que ningún matemático serio negaría el carácter experimental a todos estos cálculos o los aceptaría como demostraciones rigurosas. Hay que insistir en que, aunque sea fuentes valiosas de ideas y conjeturas, el paso a la demostración en su sentido tradicional sólo es posible cuando ésta está bien elaborada. En el pasado, todo lo que permitía obtener la demostración, quedaba oculto a la publicación. Ahora puede sacarse a la luz y, de hecho, los matemáticos suelen recurrir a Internet para airear sus resultados, aunque sean experimentales<sup>20</sup>. La publicidad ayudará,

<sup>20</sup> Desde hace tiempo no es difícil encontrar en la red revistas electrónicas dedicadas a la matemática experimental. Cfr. D. Epstein, S. Levy y R. de la Llave, «*Experimental Mathematics. Statement of Philosophy and Publishability Criteria*», <http://www.expmath.org/expmath/philosophy.html>. Un lector que conozca la obra de G. Pólya o I. Lakatos encontrará en estos pronunciamientos el eco de su pensamiento. Algunos ven incluso más y, reconociendo en la obra de Lakatos (*Pruebas y refutaciones*, Madrid: Alianza, 1978) el carácter negociable de ciertos conceptos matemáticos (poliedro, cara, arista, etc.), han analizado la historia del T4C para mostrar también el carácter negociable de la idea misma de demostración y de los límites de lo que constituiría conocimiento matemático. Véase a este respecto la obra de un seguidor del programa fuerte de la sociología del conocimiento, D. MacKenzie, *Mechanizing Proof: Computing, Risk, and Trust*, London: M. I. T., 2001, particularmente cap. 4. Por lo demás, ideas relacionadas con estas posiciones se encuentran en las sugerencias de Tymoczko de que

así, a la purga de errores y a la eventual consolidación y desarrollo de las ideas, pero al mismo tiempo contribuirá a que los matemáticos noveles se inicien en la forma de funcionar la maquinaria descubridora y justificadora.

La demostración asistida por ordenador del T4C sorprendió por ser la primera obtenida por este medio y por afectar al «problema matemático más fascinante no resuelto»<sup>21</sup>. Los grafos planos y las formas de colorearlos habían sido objeto de investigación matemática desde los mismos comienzos de la teoría de grafos, debido a las relaciones que habían tenido con el problema de los cuatro colores. En sus orígenes, el problema surgía al preguntar si siempre era posible colorear las regiones de un mapa plano con cuatro colores, de modo que las regiones que tenían una frontera común, y no sólo un punto, recibían colores distintos. Este requisito de que las regiones adyacentes se toquen en más de un solo punto es condición necesaria para que el teorema tenga significado. La historia<sup>22</sup> empieza cuando el matemático Francis Guthrie, al intentar pintar los condados ingleses, se percató de que cuatro colores bastaban. Planteado el problema a su hermano Frederick, éste lo formula en 1852 a su profesor, el matemático Augustus de Morgan. Años después, en 1879, el abogado Alfred Kempe pretendió obtener una demostración, en la cual Percy Heawood encontró un error 11 años más tarde. Sin embargo, el argumento de Kempe presentaba una demostración muy simple del Teorema de los Cinco Colores.

Kempe argumentó que si hay mapas que requieren cinco colores, debe haber un mapa menor, es decir, un mapa con el menor número de regiones que requiera cinco colores, llamado mapa pentacromático minimal. Pero un mapa de este tipo no puede existir porque, si existiera, siempre podríamos «reducirlo», es decir, hallar uno menor que también requiriera cinco colores. Kempe descompuso este argumento en cuatro lemas: (1) Todo mapa contiene una región con cinco vecinos o menos. (2) Ningún mapa pentacromático minimal puede tener una región con sólo dos o tres vecinos, porque podemos hallar un mapa menor que también precise cinco colores. (3) Asimismo ningún mapa semejante puede tener una región con un número exacto de cuatro vecinos. (4) Ningún

---

la justificación del conocimiento y la demostración de teoremas son actividades esencialmente públicas («Making Room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics», *The Mathematical Intelligencer*, 8 (1986), n. 3, pp. 44-50).

21 K. O. May, «The Origin of the Four-Color Conjecture», *Isis*, 56 (1965), p. 346.

22 Los lectores interesados por la historia y otros detalles técnicos, pueden consultar el capítulo 7 de K. Devlin, *Mathematics: The New Golden Age*, London: Pelikan Books, 1988. Un estudio más profundo es el de R. Fritsch y G. Fritsch, *The Four-Color Theorem. History, Topological Foundations, and idea of Proof*, Berlin: Springer, 1998, edición ampliada y actualizada del alemán *Der Vierfarbensatz*, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1994. Más reciente es R. Wilson, *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2002.

mapa semejante puede tener una región con un número exacto de cinco vecinos. Kempe demostró los lemas, pero la demostración del (4) era falaz. La forma del razonamiento de Kempe revela dos componentes: El lema (1) presenta un conjunto «inevitable» de configuraciones. Los lemas (2)-(4) pretenden mostrar que cada configuración del anterior conjunto es «reducible». En general, cualquier conjunto inevitable de configuraciones reducibles demostraría el teorema mostrando la inexistencia de un mapa pentacromático minimal. La solución que se obtuvo en 1976 exhibía, de hecho, ese conjunto.

Los esfuerzos conjuntos de Wolfgang Haken y Kenneth Appel, asistidos en parte por John Koch, acabaron en la posibilidad de reducir los conjuntos inevitables con millones de configuraciones a conjuntos con algo más de 2000 configuraciones. Mientras tanto, Y. Shimamoto obtuvo una demostración matemática válida de que el T4C se seguía de un lema clave supuestamente establecido por un ordenador. Pero resultó que había un error en el programa que producía computaciones erróneas. La imposibilidad de repetir el resultado se descubrió cuando H. Whitney y W. T. Tutte presentaron una demostración tradicional de la negación del lema establecido por el ordenador, a consecuencia de la cual ambos matemáticos advirtieron a sus colegas contra el uso de ordenadores<sup>23</sup>. Obviamente, ante la posibilidad de error sólo se puede confiar en la evidencia empírica.

Para demostrar el T4C, el problema original se ha de traducir a otro equivalente sobre grafos. La demostración puede dividirse entonces en dos partes: la generación de un conjunto inevitable de configuraciones y la demostración de que ningún elemento del conjunto inevitable acabará en un contraejemplo minimal del teorema. Esta segunda parte es quizás la más importante y consiste en mostrar que un vértice de grado 5 es reducible a través de un proceso que se denomina «cadenas de Kempe» (Heawood se percató de que el fallo de Kempe estaba en que éste había cambiado a la vez los colores de dos cadenas). El proceso que lleva a mostrar que una configuración A es reducible empieza suponiendo que A está encajada en un contraejemplo minimal del teorema. Se elimina A, dando lugar a un grafo menor. Puesto que se supone que el grafo original es un contraejemplo minimal, el grafo menor puede ser coloreado con cuatro colores. A continuación se reemplaza A en el grafo y se intenta extender el color del anillo que rodea a A a los vértices interiores. Si ello puede llevarse a cabo para cualquier coloración del anillo, entonces se dice que A es reducible.

23 H. Whitney y W. T. Tutte, «Kempe Chains and the Four Colour Problem», *Utilitas Mathematica*, 2 (1972), pp. 241-281; reimpresso en D. R. Fulkerson (ed.), *Studies in Graph Theory, Part II*, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1975, pp. 378-413.

La demostración prosigue, pero lo interesante es que no hay un único conjunto inevitable. De hecho, en la demostración original<sup>24</sup>, determinadas configuraciones que resultaban difíciles de reducir eran reemplazadas por otras. El conjunto inevitable del artículo original constaba de 1476 configuraciones. La demostración más reciente de Robertson, Sanders, Seymour y Thomas<sup>25</sup> usa 633 configuraciones y reduce el número de reglas de descarga de más de 300 a tan sólo 32. A pesar de la mejora de la demostración, ésta no ha sido reducida a un sencillo proceso que satisfaga a todos los matemáticos: la demostración aún requiere demasiados cálculos con el ordenador de manera ineludible<sup>26</sup> y no se pueden verificar «a mano». La posibilidad de encontrar un error en los programas plantea todavía serios problemas. Incluso la parte que en principio puede comprobarse a mano es tan complicada y tediosa que nadie ha podido verificarla totalmente. Pero uno de los autores de la demostración, R. Thomas, ha defendido convincentemente que el teorema no es un resultado aislado y carente de interés. En realidad ocupa un lugar central en la matemática combinatoria debido a la amplia variedad de formulaciones equivalentes<sup>27</sup> y a las técnicas fundamentales que se han desarrollado con el fin de demostrarlo. Sin embargo, como él mismo señala<sup>28</sup>,

«se puede argumentar que nuestra ‘demostración’ no es una demostración en el sentido tradicional, porque contiene pasos que los humanos nunca podrán verificar. En particular, no hemos demostrado la corrección del compilador con el

24 K. Appel y W. Haken, «Every Planar Map is Four Colorable. I. Discharging», *Illinois Journal of Mathematics*, 21 (1977), pp. 429-490. K. Appel, W. Haken y J. A. Koch, «Every Planar Map is Four Colorable. II. Reducibility», *Illinois Journal of Mathematics*, 21 (1977), pp. 491-567. Estos artículos fueron revisados y actualizados más tarde dando lugar a la obra *Every Planar Map is Four Colorable*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1989.

25 N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour y R. Thomas, «The Four Color Theorem», *Journal of Combinatorial Theory* (Series B), 70 (1997), n. 1, pp. 2-44. Anunciado antes como «A New Proof of the Four-Colour Theorem», *Electronic Research Announcements of the AMS*, 2 (1996), pp. 17-25, y que puede ser consultado on-line (<http://www.ams.org/era>). Un interesante resumen se encuentra en R. Thomas, «The Four Color Theorem», <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>.

26 Con un poco de imprecisión podemos decir que, en la demostración de Appel y Haken, la mayoría de las configuraciones de mapas era tan grande que el uso del ordenador para comprobarlas era «inevitable». De hecho, para completar la demostración se requería del llamado lema de reducibilidad que no podía ser examinado y era en este punto donde el ordenador intervenía de forma decisiva.

27 Sobre estas formulaciones equivalentes puede verse R. Thomas, «An Update on the Four-Color Theorem», *Notices of the AMS*, 45 (1998), n. 7, pp. 848-859.

28 R. Thomas, «The Four Color Theorem», <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>.

que compilamos nuestros programas, ni hemos demostrado la infalibilidad del hardware con el que procesamos nuestros programas. Debemos tener fe en ellos, y resulta concebible que puedan ser una fuente de error. No obstante, desde un punto de vista práctico, la posibilidad de un error en el ordenador, que aparezca consistentemente y del mismo modo al procesar todos nuestros programas en todos los compiladores y con todos los sistemas operativos con que se procesen nuestros programas, es infinitamente pequeño en comparación con la posibilidad de que se produzca un error humano al llevar a cabo una comprobación similar. Aparte de la posibilidad hipotética de que un ordenador responda incorrectamente, pero de modo consistente, el resto de nuestra demostración se puede verificar de la misma manera que las demostraciones matemáticas tradicionales. Concedemos, sin embargo, que verificar un programa de ordenador es mucho más difícil que comprobar una demostración matemática de la misma longitud».

El ejemplo del T4C puede servir, entonces, para explicar las posibilidades y límites de los métodos de la matemática pura y los de la computación, pues la combinación de ambos tipos de métodos es necesaria para abordar y resolver el problema. Dicha combinación puede apuntar a un desarrollo fructífero y así al progreso, lo cual contribuirá sin duda a que los matemáticos y los no matemáticos no interpreten el resultado con los medios utilizados de forma negativa.

En la concepción cuasi-empirista que Tymoczko defendía, y ante el resultado de Appel y Haken, el matemático queda presentado en el momento de usar métodos análogos a los del científico, con la excepción de que las conclusiones son verificadas mediante una demostración en lugar de ser producto de observaciones. Pero al aceptar una concepción cuasi-empirista de la verdad, de acuerdo con la cual una proposición particular queda establecida apelando a la evidencia empírica, se abandonan o se modifican drásticamente algunas creencias tradicionales como: (1) Todos los teoremas son conocidos a priori. (2) La matemática, en oposición a la ciencia, en general, carece de contenido empírico. (3) La matemática sólo se apoya en las demostraciones, mientras que las ciencias hacen uso de experimentos. (4) Los teoremas son ciertos hasta un punto en que no se les puede equiparar con ninguna ley científica.

Para Tymoczko, la demostración del T4C viene a poner de relieve que estas creencias resultan ya insostenibles. Mientras que en una demostración tradicional, los expertos verifican que lo que ha hecho un ser humano es correcto y que la conjetura ha sido demostrada, el ordenador verifica realmente algo que resulta imposible para un ser humano, a pesar de que éste lo ha programado. Lo verificado por el ordenador puede ser verificado por otro ordenador, pero no por un ser humano. En el caso de una demostración tradicional, lo verificado por unos expertos puede ser verificado por otros, y lo demostrado puede ser confirmado por un matemático con una demostración alternativa, si fuera

preciso. Se trata, pues, de un problema de fiabilidad. La fiabilidad del teorema descansa en la capacidad que pueden tener los matemáticos de evaluar un conjunto muy complejo de elementos empíricos, de modo que el conocimiento que han adquirido procede de «los resultados de un experimento bien ideado con el ordenador»<sup>29</sup>. Al faltar la fiabilidad en este y en otros tipos de actividad matemática<sup>30</sup>, y sin que importe demasiado cuan alta sea la probabilidad, sería peligroso realizar determinadas afirmaciones acerca de la verdad de una proposición matemática sin la advertencia de que el método a través del cual quedó establecida no es completamente fiable, y por ello los argumentos que tienen pasos que sólo son probablemente verdaderos deberían ser tratados como los argumentos de otras ciencias. Las conclusiones no dejan de ser hipótesis que pueden necesitar de ulterior comprobación, incluso para concluir que son probablemente verdaderas.

Recordemos que lo que Tymoczko venía a proponer era que una demostración buena se caracteriza por ser convincente, escrutable, y formalizable. El primer requisito significa simplemente que los matemáticos creen en una demostración cuando la ven. Wittgenstein sostenía que, en la práctica, éste es el único requisito para una demostración. Pero la mayoría de los matemáticos exige algo más que la mera plausibilidad o la creencia. Es preciso entender, comunicar y verificar mediante un análisis racional la demostración: debe ser escrutable, se debe poder examinar cuidadosamente. Finalmente, la formalizabilidad significa que siempre podemos hallar un sistema formal adecuado en el que representar una demostración informal.

Estos tres rasgos de una buena demostración reflejan tres aspectos muy diferentes de la práctica, cada uno de los cuales es un componente crucial de la forma en que la matemática se lleva realmente a cabo. Que una demostración deba ser convincente es parte de la psicología y la sociología de la matemática, que proporcionan la clave para entender la matemática como una actividad humana. La epistemología de la matemática entra en juego con el requisito de que una demostración debe ser escrutable, pues no podemos decir que hemos creado un fragmento genuino de conocimiento a menos que pueda ser examinado y verificado por otros. En fin, invocamos a la lógica matemática para la formalización y para un incremento del rigor. En este sentido, y ante la pregunta de si la demostración del T4C es un nuevo tipo de demostración, Haken<sup>31</sup> respondía:

29 Th. Tymoczko, «The Four-Color Problem and the Philosophical Significance», p. 59.

30 Para más detalles sobre estas cuestiones, véase J. Alcolea, «La demostración matemática: Problemática actual», *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, 7 (2002), pp. 15-34.

31 W. Haken, «Controversial Questions About Mathematics», *The Mathematical Intelligencer*, 3 (1981), p. 119.

«Si se considera que una demostración matemática es una cadena finita de deducciones lógicas formales, entonces la demostración del teorema de los cuatro colores no es nada excepcional; sólo la cadena de deducciones es algo más larga que lo habitual debido al gran número de distinciones que hay que hacer entre los casos. Pero si se añade el requisito de que una demostración matemática debe ser «escrutable» en el sentido de que un matemático solo, sin la ayuda de ningún instrumento físico para escrutar, puede comprobar todos los detalles en un tiempo limitado, entonces las cosas parecen diferentes».

Es obvio que el gran número de nuevos teoremas publicados en las últimas décadas plantea un problema de escrutinio que parece ser bastante serio, con independencia de cuan corta o cuan larga sea cada demostración. Por ello, Haken acababa aconsejando el uso de ordenadores como instrumento adecuado para el escrutinio. En el tiempo transcurrido, la práctica matemática experimental no ha dejado de crecer exponencialmente<sup>32</sup>.

#### IV. DEMOSTRACIONES ASISTIDAS POR ORDENADOR: ¿UNA NUEVA VARIACIÓN SOBRE UN VIEJO TEMA?

En el momento de su publicación, el ensayo de Tymoczko recibió un buen número de críticas, que ya hemos reseñado más arriba, y que él supo contestar en una pequeña nota introductoria a la reimpresión del ensayo en su antología. Vale la pena señalar que, en su excelente obra sobre la naturaleza del conocimiento matemático, Ph. Kitcher abordó muy de pasada el tema. En conversación<sup>33</sup>, Tymoczko llegó a reconocer que la crítica de este filósofo era acertada, pero en el sentido de que las demostraciones asistidas con ordenador podrían entenderse como la continuación del empirismo en matemáticas por otros medios. Sin embargo, como vamos a ver, el abordaje de Kitcher no nos parece totalmente afortunado.

Como es sabido, tratamos de aumentar nuestra comprensión de un campo matemático al presentarlo de una manera sistemática, es decir, en un sistema axiomático, con un pequeño número de principios a partir de los cuales podemos inferir los resultados a través de pasos que exponen la conexión entre

32 Véase J. M. Borwein y D. Bailey, *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21st Century*, Natick, MA: A. K. Peters, 2004; y J. M. Borwein, y D. Bailey, «Experimental Mathematics: Examples, Methods and Implications», *Notices of the AMS*, 52 (2005), n. 5, pp. 502-514.

33 En la misma conversación, Tymoczko mostró sus simpatías por las posiciones de Kitcher. Lo prueba el tono tan elogioso de su introducción al capítulo del libro de Kitcher que queda reimpresso en su antología.



enunciados de la manera más completa posible. Kitcher propone considerar las demostraciones como «sucesiones de enunciados que pertenecen a un sistema de tales sucesiones». Pero «el conjunto de razonamientos aceptados supera al conjunto de demostraciones aceptadas», porque algunos enunciados se establecen sobre la base de argumentos inductivos o analógicos, y se usan para garantizar la creencia, como la obra de Pólya nos ha mostrado. Para Kitcher los más interesantes de los razonamientos aceptados son los *razonamientos no rigurosos* de la práctica matemática. «Comparten con las demostraciones aceptadas suficientes rasgos estructurales como para hacer que sea razonable suponer que se puede conseguir una demostración siguiendo los detalles que ellos han fijado», pero es imposible reconstruirlos para integrarse en el sistema de demostraciones, porque su «fina estructura no se entiende»<sup>34</sup>.

En este contexto, y por los datos ya ofrecidos, un buen ejemplo lo constituye la historia de la conjetura de los cuatro colores, conjetura que ha cosechado un buen número de presuntas demostraciones<sup>35</sup>. Pero, ¿qué sucede con la demostración asistida por ordenador de esta conjetura? Si la demostración sirve para generar nuevo conocimiento y aumentar la comprensión, parece que esa demostración no proporciona ni lo uno ni lo otro. Si las concepciones metamatemáticas deben contener cánones de demostración y los matemáticos contemporáneos parecen haberse puesto de acuerdo en que las demostraciones deberían ser (mecánicamente) formalizables y representables en una teoría de conjuntos<sup>36</sup>, porque ésta es la disciplina matemática fundamental, ¿qué ocurre entonces con las demostraciones asistidas por ordenador? ¿Están actuando irracionalmente los partidarios de estas demostraciones o avanzando hacia una nueva práctica o hacia un nuevo paradigma como Tymoczko<sup>37</sup> sugería?

Las demostraciones asistidas por ordenador sugieren que ha habido un cambio importante en el carácter del conocimiento matemático. Como ya se ha indicado, Tymoczko argumenta<sup>38</sup> que las computaciones del ordenador usadas en el T4C infunden al razonamiento matemático un rasgo nuevo que no es menos empírico que la experimentación en el razonamiento científico ordinario. Para él, los procesamientos del ordenador en esa demostración son, de hecho, experimentos, que dotan a la matemática de contenido empírico. Pero, según Kitcher, las demostraciones asistidas por ordenador «son simplemente una nueva

34 *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 181-182.

35 Remitimos de nuevo al capítulo 7 del libro de K. Devlin, *Mathematics: The New Golden Age*.

36 Según Kitcher, parece que los matemáticos contemporáneos suscriben estas exigencias (*The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 190). Estas exigencias también son identificadas por Tymoczko («The Four-Color Problem and the Philosophical Significance», pp. 60-61.)

37 «The Four-Color Problem and the Philosophical Significance», p. 82.

38 *Ibidem*, p. 63.

variación de un viejo tema»<sup>39</sup>, es decir, los matemáticos siempre se han quejado de la posibilidad de que un error pudiera estar acechando en alguna parte de una demostración larga. Los matemáticos y los ordenadores cometen errores. Cuando la comprobación a mano es posible, la probabilidad de error humano es considerablemente más elevada que la de un error de máquina. Curiosamente, los matemáticos solían incrementar su confianza en sus demostraciones pidiendo a otros matemáticos que las revisaran. Pero este método tradicional de comprobar las demostraciones, leerlas y verificar que cada inferencia es correcta, no es aplicable a las demostraciones asistidas por ordenador.

Ahora bien, con los ordenadores resulta curioso que tengamos una demostración que necesita otra demostración para mostrar que la primera es correcta. Esto podría hacerse demostrando la consistencia del programa que procesa el ordenador o programando otro ordenador para comprobar el resultado obtenido por un ordenador anterior. Los matemáticos han sido testigos de un sinnúmero de otras verificaciones con otros ordenadores, cada una diferente de, y más simple que, las otras. Pero, un millar de verificaciones no garantizará la corrección del resultado. Basta con una simple refutación o con el descubrimiento de un simple fallo, y todo el conjunto de verificaciones se vendrá abajo. Así, parece que ninguna verificación con ordenador de la conjetura de los cuatro colores se aceptará como definitiva. Los matemáticos esperan todavía un argumento que ponga al descubierto la razón oculta para la verdad de la conjetura. Para convencer a un humano, una demostración debería ser transparente, y por ello no nos sorprende que los matemáticos encuentren las demostraciones con ordenador menos convincentes. Saben que la verificación con ordenador de la conjetura de los cuatro colores posee menos valor que, por ejemplo, la demostración completa del último teorema de Fermat, porque esta última abre nuevas posibilidades para la matemática.

Parece, además, que este nuevo tipo de demostración ha supuesto problemas para la comunidad matemática. Nunca antes el concepto de demostración o demostraciones concretas resultaron problemáticas, excepto en relación con algunos métodos o principios que se usaban en su seno<sup>40</sup>. Pero la demostración del T4C fue recibida con severa hostilidad, y algunos matemáticos expresaron su inquietud. Por ejemplo, Ian Stewart, de la Universidad de Warwick, se quejó de que la demostración «no da una explicación satisfactoria de *por qué* el teorema es verdadero». Es prácticamente imposible captar las enormes e inusuales extensiones de la demostración y de los cálculos del ordenador, que parecen no poseer estructura. Para Stewart todo tenía la apariencia de una misteriosa

39 *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 46.

40 Por ejemplo, demostraciones que usan el Axioma de Elección o demostraciones por reducción al absurdo de proposiciones existenciales, en el caso del intuicionismo.

coincidencia que dejaba a los matemáticos intrigados: «¿Por qué hay un conjunto inevitable de configuraciones del conjunto reducible? La mejor respuesta de momento es: ahí está. La demostración: aquí está, mírala. La búsqueda que el matemático hace de la estructura oculta, su ansia por fijar las conexiones estructurales, queda frustrada»<sup>41</sup>.

Como el matemático R. Thom decía, los matemáticos rechazarán una demostración no porque sea falsa, sino porque es incomprendible. La comprensión significa en este contexto «un conocimiento completo de todos los argumentos involucrados en la demostración escrita»<sup>42</sup>. En definitiva, no tenemos una demostración escrita, porque algunas partes sólo son verificadas aleatoriamente por el ordenador. Resulta muy difícil que un humano pueda comprender un programa de ordenador con miles y miles de líneas de código. Si el programa es el resultado de un proceso de diseño razonable, la confianza puede aumentar. El humano puede tener presente algunos detalles y la arquitectura total, pero un refinamiento concreto puede resultar imposible al análisis. Esto marca una gran diferencia con respecto a los argumentos no rigurosos tradicionales. Así, pensando que los matemáticos pueden estar aún lejos de conseguir una «buena» demostración de la famosa conjetura de los cuatro colores, el algebrista P. Halmos afirma que «los oráculos no son demostraciones matemáticas útiles»<sup>43</sup>.

Ahora bien, ¿es posible considerar el ordenador como un agente semi-ideal? Sabemos que un agente ideal puede ejecutar grandes operaciones, que están más allá de las capacidades humanas. Se puede entender como un paso intermedio entre el mundo ideal y el mundo humano real de las operaciones la gran cantidad de cálculos que el ordenador lleva a cabo para nosotros en el T4C de una manera firme y dependiente. Si Kitcher necesita un sujeto matemático ideal en su teorización filosófica de la matemática, es obvio que no tenemos «una nueva variación sobre un viejo tema», porque los ordenadores estarían haciendo parte del trabajo que atribuiríamos a ese sujeto ideal. A medida que la matemática evoluciona, los matemáticos estarían mejorando su comprensión de las habilidades del sujeto ideal que quedan libres de nuestras bien conocidas limitaciones. A medida que la tecnología de ordenadores evolucione, los mate-

41 I. Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, Harmondsworth: Penguin, 1981, p. 304.

42 R. Thom *et alii*, «Responses to 'Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics', by A. Jaffe and F. Quinn», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 (1994), n. 2, p. 203. Véase también R. Thom, «Modern Mathematics. Does it Exist?», en A. G. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge: Cambridge University Press, 1973, p. 204; y J. Alcolea, «Proof as a Way to Increase Understanding», en C. Martínez *et alii* (eds.), *Verdad: Lógica, representación y mundo*, Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, 1996, pp. 243-251.

43 P. R. Halmos, «Has Progress in Mathematics Slowed Down?», *American Mathematical Monthly*, 97 (1990), n. 7, pp. 577.

máticos pueden aumentar su comprensión de la estructura de las demostraciones asistidas por ordenador.

Pero hay aquí otra analogía interesante: las grandes postulaciones que permitimos para el sujeto ideal –postulaciones que no entendemos por completo, y que nuestra «creencia en [ellas] está necesariamente basada en la fe»<sup>44</sup>–, con el fin de conseguir demostraciones de algún teorema, es similar a nuestra aceptación del ordenador. No queremos decir que el ordenador podría actuar como un matemático que posee la habilidad de conocer el resultado demostrado, ya que es difícil sostener que el sujeto ideal está dotado de conocimiento. Apuntamos hacia algo que, como Tymoczko señala<sup>45</sup>, está relacionado con la práctica, es decir, *si* aceptamos ciertos cálculos inevitables llevados a cabo por el ordenador, *entonces* cierto problema queda resuelto o cierto teorema queda demostrado. Del mismo modo, a un nivel teórico, la aceptación de los axiomas que explicarían las capacidades del sujeto ideal darían lugar a algunos resultados. Sin duda alguna, mientras que es improbable que un sujeto ideal sea aceptado en las filas de una sociedad matemática, ésta acabará aceptando el ordenador con la creciente convicción de que el futuro de la matemática descansará más en la colaboración y la computación inteligente<sup>46</sup>. Ocurre como en la demostración del T4C: un proceso complejo de interacción entre el humano y el ordenador, donde Appel y Haken empezaron a considerar el ordenador como un compañero activo que estaba ‘pensando’ de una manera diferente a como ellos pensaban. En un determinado momento, dicen<sup>47</sup>,

44 W. H. Woodin, «Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited», *The Mathematical Intelligencer*, 16 (1994), n. 3, p. 33. Por ejemplo, es probable que algún axioma de los cardinales grandes sea la clave para demostrar la Hipótesis de Riemann o la Conjetura de Goldbach, que son enunciados de la teoría de números como muchas de las cuestiones clásicas no resueltas de la matemática. Pero también es posible que el ordenador intervenga de forma decisiva en la solución de estas cuestiones. Resulta interesante observar cómo Woodin apela a la creencia, a la fe, tal y como Thomas apela en la cita referida en la nota 28. Por lo demás, ello está bastante extendido entre los matemáticos: «No se puede negar, pues, que la aceptación del teorema de Appel-Haken comporta un cierto acto de fe. Aunque yo lea y compruebe cada una de las líneas que han escrito, todavía tendré que creer que los cálculos del ordenador llevan realmente a cabo lo que se supone que han de llevar a cabo» (Ph. J. Davis y R. Hersh: *The Mathematical Experience*. Harmondsworth: Penguin, 1983, p. 383).

45 «The Four-Color Problem and its Philosophical Significance», p. 63.

46 Obviamente éste será el caso si en esa sociedad la inmensa mayoría de matemáticos no fuera «educada antes del desarrollo de los ordenadores de alta velocidad» (K. Appel y W. Haken, «La solución del mapa de los cuatro colores», *Investigación y ciencia*, 15 (diciembre 1977), p. 90).

47 K. Appel y W. Haken, «The Four-Color Problem», en L. A. Steen (ed.), *Mathematics Today*, Berlin: Springer, 1978, p. 175; reimpresso en D. Jacquette (ed.), *Philosophy of Mathematics. An Anthology*, Oxford: Blackwell, 2002.

«el programa, que ya había absorbido nuestras ideas y mejoras durante dos años, empezó a sorprendernos. Al principio, comprobamos sus argumentos a mano de manera que siempre podíamos predecir el curso que seguiría en cualquier situación; pero ahora de repente comenzó actuar como una máquina de jugar al ajedrez. Elaboraba estrategias complejas basadas en todos los trucos que se le habían estado ‘enseñando’ y con frecuencia estos enfoques eran mucho más inteligentes que los que nosotros habríamos intentado. Así empezó a enseñarnos cosas sobre cómo proceder que nunca habíamos imaginado. En cierto sentido, había superado a sus creadores en algunos aspectos del trabajo ‘intelectual’, así como en sus partes mecánicas».

Estas ideas sugieren que las demostraciones pueden existir independientemente de nuestra capacidad para examinarlas o completarlas<sup>48</sup>. Por tanto, es razonable que algunos matemáticos aún estén buscando una demostración comprensible de la conjetura de los cuatro colores, y alguna manera de comprender las operaciones del ordenador. Mencionemos la insistencia de Kitcher en que los matemáticos buscan comprensión, porque es la manera de mejorar nuestra caracterización del sujeto ideal a través de operaciones que se deben conectar con operaciones de nuestro entorno. Es decir, la caracterización de un sujeto ideal «a quien atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar nuestro medio»<sup>49</sup>. En el caso del ordenador no necesitamos atribuirle nada, porque él posee esos poderes. De este modo, decir que el enunciado del T4C es verdadero es hacer una afirmación acerca de los poderes que se reconocen adecuadamente en el ordenador, y ‘adecuadamente’ significará que la práctica matemática lo incluirá como fruto del desarrollo de la indagación matemática racional. Pero no olvidamos que el ordenador fue creación nuestra, como lo fue el sujeto matemático ideal.

## V. UNA PROPUESTA A MODO DE CONCLUSIÓN

Lo que parece claro de todo este problema con las demostraciones asistidas por ordenador y del contexto de la matemática experimental es que se está pro-

48 Una idea bastante popperiana, por cierto. Cfr. J. Alcolea y F. J. Santonja, «Los conceptos matemáticos en el mundo 3 de Popper», en A. Vicente *et alii* (eds.), *Actas del IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España (Valladolid, 3-6 de noviembre de 2004)*, Valladolid: Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España, 2004, pp. 118-120.

49 Ph. Kitcher, «Mathematical Naturalism», en W. Aspray y Ph. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 1988, p. 313.

duciendo un cambio importante en la propia dinámica interna de esta ciencia. Sabemos que esta dinámica se traducía tradicionalmente en la introducción de ideas imaginativas para precisar los análisis informales que los matemáticos hacían de ciertas nociones intuitivas y cómo recurrían a demostraciones para eliminar propiedades dudosas. Este análisis también se extendía para resolver cuestiones pendientes de decisión usando propiedades evidentes (que podían codificarse en axiomas más o menos evidentes) y quedando refrendadas por eventuales demostraciones. Es decir, la demostración venía a articular los objetos matemáticos dispersos en la intuición, por decirlo con R. Thom<sup>50</sup>, al tiempo que venía a incrementar la comprensión del matemático de aquello que era su objeto de estudio.

De este modo, se abría paso una concepción hipotético-deductiva de la demostración que de alguna manera hacía de ésta una simple verificación –en el sentido de que sacaba en claro que lo que decía el teorema era verdadero–, pero que, además, quedaba configurada como un ideal regulativo riguroso en el cual podrían reconocerse las siguientes propiedades: (1) Universalidad, pues es para todos. (2) Precisión, es única. (3) Preserva la consistencia, si las reglas son aplicadas correctamente. (4) Estabilidad inferencial en el tiempo. (5) Fiablez, a salvo de posibles refutaciones. (6) Generalizabilidad, por las técnicas usadas. (7) Permite el descubrimiento, al establecer conexiones entre conceptos inventados o descubiertos. (8) Escrutabilidad, es revisable. (9) Formalizabilidad, es representable en un sistema formal. (10) Convicción, pues es irresistible, en el sentido de que no puede ser de otra manera y nos deja más allá de toda duda. (11) Su posesión da conocimiento<sup>51</sup>. (12) Paradigma de racionalidad y razonabilidad. (13) Eficiencia, pues conecta los teoremas con los axiomas y, en realidad, a todas las proposiciones matemáticas<sup>52</sup>. (14) Objetividad, ya que las

50 R. Thom, «¿Son las matemáticas «modernas» un error pedagógico y filosófico?», en *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza, 1978, p. 121.

51 Así, dice Aristóteles, «a la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel <razonamiento> en virtud de cuya posesión sabemos. (...) pues saber de manera no accidental aquellas cosas de las que hay demostración es tener su demostración» («Analíticos segundos (I, 2, 71b16-24)», en *Tratados de Lógica (Órganon)*, Madrid: Gredos, 1988, vol. II, p. 316).

52 En este sentido, vendría a identificarse con la deducción lógica. Esto es, la demostración matemática sería demostración lógica. Por ello, B. Russell decía que «es del todo imposible trazar una línea divisoria entre [la matemática y la lógica]; de hecho, son una sola cosa» (*Introducción a la filosofía matemática*, Barcelona: Paidós, 1988, p. 171). Ello no obstante, las «razones que determinan nuestro asentimiento en la lógica y la matemática pura son, en parte, de tipo exclusivamente inductivo y probabilístico, pese al hecho de que, en cuanto a su orden lógico, las proposiciones de la lógica y la matemática pura se desprendan de las de las premisas de la lógica de modo puramente deductivo. Este detalle me parece importante, ya que podrían surgir errores de asimilar el orden lógico al epistemológico, e igualmente, a la inversa, de asi-

conexiones son ajenas al sujeto. (15) Naturalidad, es lo que cabía esperar. (16) Matematizable, esto es, convertible en objeto matemático.

Ahora bien, las aclaraciones de Tymoczko y las nuestras sobre la demostración asistida por ordenador del T4C nos plantean las siguientes consideraciones: (1) El razonamiento matemático queda dotado de un rasgo tan empírico como el introducido por la experimentación en el razonamiento científico. (2) La demostración es un experimento que confiere a la matemática contenido empírico. (3) Los experimentos pueden falsar hipótesis científicas. (4) Las computaciones no pueden falsar hipótesis matemáticas establecidas. (5) El conocimiento matemático es *a priori* en el sentido de ser inmune a la futura falsación computacional. (6) La demostración marca un contraste entre los buenos argumentos científicos (no-deductivos y revisables) y las demostraciones matemáticas correctas (deductivas y no-revisables). (7) Establece una oposición o, al menos, diferenciación, entre el conocimiento (matemático) directo y el conocimiento (matemático) indirecto. (8) Nos permite hablar de demostraciones con lagunas y separarlas de las demostraciones sin lagunas. (9) Es una demostración relativa, en el sentido de apelar a un instrumento ajeno al propio matemático, y no una demostración absoluta, en el sentido de que bastarían las relaciones inferenciales<sup>53</sup>. (10) El mayor problema que se sigue planteando fue formulado acertadamente por el matemático Ron Graham: «si ningún ser humano puede nunca esperar comprobar una demostración, ¿es realmente ésta una demostración?»<sup>54</sup>.

Si a todo ello añadimos la siguiente forma de caracterizar un experimento (bien ideado) o razonamiento experimental no-riguroso en atención a la demostración del T4C: (1) Los métodos hipotético-deductivos conllevan la deducción de hipótesis (predicciones o retrodicciones) que el experimento contrastará. (2) Coloca las creencias ante el tribunal de la experiencia. (3) Apoya la teoría. (4) Se define en términos de las necesidades de la teoría, la cual guía la práctica experimental. (5) Informa de modo distinto a la teoría. (6) La fuerza epistémica del resultado del experimento se basa en el consenso y las decisiones del grupo de expertos que proponen, critican y evalúan el experimento y resuelven el desacuerdo argumentando y tomando en consideración: (a) la competencia de los autores y la de los fabricantes del ordenador; (b) las normas de seguridad y control del hardware y del software; la demostración de la consistencia de

---

milar el orden epistemológico al orden lógico» («Atomismo lógico», en *Lógica y conocimiento*, compilación de R. C. Marsh, Madrid: Taurus, 1981, p. 459).

<sup>53</sup> Es evidente que, en sentido estricto, no hay demostraciones absolutas, pues siempre son *relativas* a los axiomas y, eventualmente, a otros teoremas. En el caso del T4C, no se trata, pues, de este «relativismo».

<sup>54</sup> Citado por W. Dunham, *El universo de las matemáticas*, Madrid: Pirámide, 1996, p. 186.

los programas, etc.; (c) la tradición autorizada de interpretación y análisis de instrumentos. (7) Es un resultado experimental que necesita de verificación independiente.

*Entonces* todo lo que nos queda es un argumento o razonamiento no riguroso a favor del T4C. Pues, por un lado, disponemos de los dos siguientes teoremas de la teoría de grafos demostrados con medios tradicionales y rigurosamente: (1) Todo mapa planar puede colorearse con cinco colores. (2) Hay mapas para los que tres colores son insuficientes. Sabemos, además, por la obra de Appel, Haken, Koch, Robertson, Sanders, Seymour y Thomas, que diferentes ordenadores han analizado cada tipo de mapa planar y han verificado que cada uno es 4-coloreable. Este último hecho viene respaldado por la tecnología y la programación de ordenadores que son bastante fiables, y la garantía que ofrece que el ordenador ha sido adecuadamente programado y su hardware carece de defectos. Así que a la vista de determinados hechos matemáticos e informáticos tenemos el T4C, a menos que se encuentre una contradicción como consecuencia de un axioma de la teoría de grafos o un defecto en el hardware o en el software de los ordenadores<sup>55</sup>.

En resumen, aunque la matemática vaya transformándose poco a poco en tecnomatemática, los matemáticos no van a renunciar a la idea de demostración, se presente ésta bajo la forma tradicional o bajo la inevitable forma computerizada. Puesto que en el caso que nos ocupa estamos más cerca de los experimentos de las ciencias físicas, por la repetición del experimento, convienen estas observaciones de C. G. Hempel<sup>56</sup>:

«Una teoría geométrica en interpretación física no puede nunca, desde luego, darse por válida con certeza matemática, por amplias y numerosas que sean las pruebas experimentales a que se someta; como cualquier otra teoría de la ciencia empírica, puede sólo conseguir un grado mayor o menor de confirmación».

55 Hemos analizado todo este argumento, desde la perspectiva de la teoría de la argumentación de Toulmin, en J. Alcolea, «L'argumentació en matemàtiques», en E. Casaban (ed.), *XIIè Congrés Valencià de Filosofia (Alcoi, 9-11 d'octubre de 1997)*, Valencia: Societat de Filosofia del País Valencià, 1998, pp. 135-147. Para una crítica de esta contribución nuestra, véase A. Aberdein, «The Informal Logic of Mathematical Proof», en R. Hersh (ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Berlin: Springer, 2006, pp. 56-70.

56 C. G. Hempel, «La Geometría y la ciencia empírica», en J. R. Newman (ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas*, Barcelona: Grijalbo, 4ª edición, 1979, vol. 5, p. 34.



JESÚS ALCOLEA BANEGAS. Profesor Titular de Universidad, adscrito al Área y Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universitat de València.

*Publicaciones recientes:*

2006a. (Editor con Wenceslao J. González) *Contemporary Perspectives in Philosophy and Methodology of Science*. Edited by W. J. Gonzalez and J. Alcolea. A Coruña: Netbiblo, 2006, x + 274 pp. (ISBN-13: 978-0-9729892-3-7; ISBN-10: 0-9729892-3-4)

2006b. «Ontological and Epistemological Problems of Mathematics». In *Contemporary Perspectives in Philosophy and Methodology of Science*. Edited by W. J. Gonzalez and J. Alcolea. A Coruña: Netbiblo, 2006, pp. 233-257. (ISBN-13: 978-0-9729892-3-7; ISBN-10: 0-9729892-3-4)

2007. «La dimensión crítica de la argumentación». En *Lógica, Filosofía de la Lógica y Filosofía del Lenguaje*. Editado por Ángel Nepomuceno, F. J. Salguero y F. Soler. Sevilla: Mer-gablum, 2007, pp. 25-42. (ISBN: 978-84-96378-35-3).

*Línea de investigación:*

En *Filosofía de la matemática* (problemas metodológicos, ontológicos y epistemológicos) y en *Teoría de la argumentación*, (técnicas y problemas argumentativos, demostrativos y no demostrativos).

*Dirección postal:*

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia. Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación. Universitat de València. 46071 Valencia.

*Dirección electrónica:* Jesus.Alcolea@uv.es