# RSME-SMM-2012 17-20 ene 2012, Torremolinos

## S01. Álgebra Combinatoria. SALA M4

Coordinada por: **Philippe Giménez**, U. Valladolid; **Enrique Reyes**, CINVESTAV.

### PROGRAMA

**mar17 18:00-18:40** →ISIDORO GITLER, CINVESTAV
*Intersección completa de ideales tóricos de grafos orientados y subgrafos theta con cuerdas.*

**mar17 18:40-19:20** →IGNACIO GARCÍA MARCO, U. La Laguna
*Intersecciones completas en ideales tóricos de grafos.*

**mar17 19:20-20:00** →MARÍA BRAS, U. Rovira i Virgili
*Recuento de semigrupos numéricos por el género.*

**mar17 20:00-20:40** →ENRIQUE REYES, CINVESTAV
*Complejos simpliciales escalonables asociados a hipergráficas simples y anillos de Stanley-Reisner.*

**mié18 11:30-12:10** →MERCEDES ROSAS, U. Sevilla
*Los coeficientes de Kronecker reducidos.*

**mié18 12:10-12:50** →ERNESTO VALLEJO, UNAM
*Politopos de fila y columna.*

**mié18 12:50-13:30** →ALEJANDRO FLORES MÉNDEZ, CINVESTAV
*Gráficas Irreducibles y $\mathbb{B}$-Rees.*

**mié18 13:30-14:10** →PHILIPPE GIMÉNEZ, U. Valladolid
*Regularidad 3 en ideales asociados a grafos bipartitos.*

### RESÚMENES

Ponente: ISIDORO GITLER, CINVESTAV
Título: *Intersección completa de ideales tóricos de grafos orientados y subgrafos theta con cuerdas*
Hora: (M4) mar17 18:00-18:40
Resumen: Trabajo conjunto con Enrique Reyes.

Sea $G=(V,E)$ un grafo simple. Consideramos para cada orientación de las aristas de $G$ el grafo orientado $G_{\mathscr{O}}$ y el correspondiente ideal tórico $P_{G_{\mathscr{O}}}$. En esta plática estudiaremos aquellos grafos con la propiedad de que $P_{G_{\mathscr{O}}}$ es una intersección completa binomial para cada orientación $\mathscr{O}$ de sus aristas. Probaremos que estos grafos se pueden construir recursivamente como $k$-sumas de ciclos o grafos completos. También mostraremos que estos grafos están determinados por la propiedad de que todos sus subgrafos theta con cuerdas tienen un triángulo transversal. Además daremos de manera explícita los subgrafos inducidos minimales prohibidos (que son ruedas parciales o descontracciones de ruedas parciales o thetas) que caracterizan a estas familia de grafos.

igitler@gmail.com

---

Ponente: IGNACIO GARCÍA MARCO, U. La Laguna
Título: *Intersecciones completas en ideales tóricos de grafos*
Hora: (M4) mar17 18:40-19:20
Resumen: Trabajo conjunto con Isabel Bermejo (ibermejo@ull.es) y Enrique Reyes (ereyes@math.cinvestav.mx). Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto MTM2010-20279-C02-02, del MICINN, España.

Sea $G$ un grafo simple no dirigido con vértices $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y aristas $E(G)=\{e_1,\ldots,e_m\}$. Sea $k$ un cuerpo arbitrario y sean $k[x_1,\ldots,x_n]$ y $k[y_1,\ldots,y_m]$ dos anillos de polinomios sobre el cuerpo $k$.

El *álgebra de aristas* de $G$, que denotamos por $k[G]$, es la $k$-subálgebra de $k[x_1,\ldots,x_n]$ generada por los monomios asociados a las aristas de $G$; concretamente

$$k[G]=k[\{x_jx_k \,|\, \{v_j,v_k\}\in E(G)\}].$$

Existe un epimorfismo de $k$-álgebras $\varphi: k[y_1,\ldots,y_m]\longrightarrow k[G]$ inducido por $\varphi(y_i)=x_jx_k$, donde $e_i=\{v_j,v_k\}$ para todo $i\in\{1,\ldots,m\}$. El núcleo de $\varphi$, denotado por $P_G$, es el *ideal tórico de* $G$.

Se sabe que $P_G$ es un ideal primo, homogéneo y binomial (ver [10], por ejemplo). Además, la dimensión de Krull de $k[G]$ es igual al rango de la matriz de incidencia de $G$, que es $n-b(G)$ donde $b(G)$ denota el número de componentes conexas de $G$ que son bipartitas. Dado que $k[y_1,\ldots,y_m]/P_G$ y $k[G]$ son $k$-álgebras isomorfas, se tiene que la altura de $P_G$ es $\mathrm{ht}(P_G)=m-n+b(G)$.

El ideal tórico $P_G$ es *intersección completa* si existe un sistema de $\mathrm{ht}(P_G)$ binomios homogéneos que lo generan.

Si el grafo $G$ es bipartito, en [2–4, 6, 8] se caracteriza de forma combinatoria cuándo $P_G$ es intersección completa. Cabe destacar el resultado de Gitler, Reyes y Villarreal en [4] donde se demuestra que $P_G$ es intersección completa si y solo si $G$ es un *grafo anillado*. Dado un grafo $H$, a un camino $\mathscr{P}$ se le denomina un $H$-camino si $\mathscr{P}$ es no trivial y toca a $H$ exactamente en sus extremos. Se dice que $G$ es un *grafo anillado* si cada bloque de $G$ que no es un vértice, ni dos vértices unidos por una arista, se puede construir añadiendo sucesivamente $H$-caminos de longitud al menos 2 que tocan a $H$ en 2 vértices adyacentes.
En este trabajo estudiamos la situación más general en que $G$ no es necesariamente bipartito desde el punto de vista combinatorio y también algorítmico.
Los resultados obtenidos son parte de [1].

[1] I. Bermejo, I. García-Marco, and E. Reyes, *Complete intersection toric ideals of graphs*, Preprint.
[2] I. Gitler and C. Valencia, *Multiplicities of edge subrings*, Discrete Math. **302** (2005), 107–123.
[3] I. Gitler, E. Reyes, and R. H. Villarreal, *Ring graphs and toric ideals*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **28C** (2007), 393–400.
[4] ______, *Ring graphs and complete intersection toric ideals*, Discrete Math. **310** (2010), no. 3, 430–441.
[5] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.
[6] M. Katzman, *Bipartite graphs whose edge algebras are complete intersections*, J. Algebra **220** (1999), 519–530.
[7] C. Tatakis and A. Thoma, *On Complete Intersection toric ideals of graphs*, arXiv:1110.1059.
[8] A. Simis, *On the Jacobian module associated to a graph*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 989–997.
[9] A. Simis, W. V. Vasconcelos, and R. H. Villarreal, *The integral closure of subrings associated to graphs*, Journal of Algebra **199** (1998), 281–289.
[10] R.H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 238, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

iggarcia@ull.es

Ponente: MARÍA BRAS U. Rovira i Virgili
Título: *Recuento de semigrupos numéricos por el género*
Hora: (M4) mar17 19:20-20:00

Resumen: Este trabajo ha sido apoyado por el proyecto TIN2009-11689 “RIPUP” y el proyecto CONSOLIDER INGENIO 2010 CSD2007-00004 “ARES”.
Un semigrupo numérico es un conjunto de naturales con el cero, cerrado por la suma y con complemento finito dentro de $\mathbb{N}$. Dados ciertos valores monetarios (coprimos), las cantidades que se pueden pagar con monedas que tengan dichos valores constituyen un semigrupo y el problema clásico de Frobenius cuestiona la mayor cantidad que no se puede pagar con estas monedas. Por ejemplo, si excluimos las monedas de un céntimo de euro, la mayor cantidad que no se puede pagar con el resto de monedas es de tres céntimos.
El género de un semigrupo es el cardinal de su complemento dentro de $\mathbb{N}$. Trataremos la curiosa sucesión dada por el número de semigrupos de cada género. Estos son los primeros valores:

$$1, 1, 2, 4, 7, 12, 23, 39, 67, 118, 204, 343, 592, 1001, \ldots$$

Se trata de una sucesión aparentemente creciente y asintóticamente con comportamiento Fibonacci, de modo que el factor de crecimiento se aproxima al número de oro. Explicaremos algunos de estos resultados demostrados y otros conjeturados, con algunas aproximaciones a los problemas abiertos.

maria.bras@urv.cat

Ponente: ENRIQUE REYES CINVESTAV
Título: *Complejos simpliciales escalonables asociados a hipergráficas simples y anillos de Stanley-Reisner*
Hora: (M4) mar17 20:00-20:40

Resumen: Sea $C$ una hipergráfica simple, denotaremos por $k[\Delta_C]$ el anillo de Stanley-Reisner asociado al complejo simplicial $\Delta_C$ cuyas caras son los conjuntos estables de $C$. En esta plática daremos condiciones necesarias para que $k[\Delta_C]$ sea Cohen-Macaulay así como para que $\Delta_C$ sea escalonable. Además se darán condiciones sobre $C$ para que estas dos condiciones sean equivalentes. Para el caso en el que $C$ es una gráfica bipartita se darán algunas características más específicas.

ereyes@math.cinvestav.mx

Ponente: MERCEDES ROSAS U. Sevilla
Título: *Los coeficientes de Kronecker reducidos*
Hora: (M4) mié18 11:30-12:10

Resumen: Comprender a los coeficientes de Kronecker es uno de los grandes problemas abiertos de la combinatoria algebraica. Los coeficientes de Kronecker son las constantes que aparecen al descomponer el producto tensorial de dos representaciones irreducibles del grupo lineal general en irreducibles. También aparecen de manera natural en el estudio de las representaciones del grupo simétrico y en la teoría de las funciones simétricas.
En esta charla explicaremos como utilizar los coeficientes de Kronecker reducidos (una segunda familia de coeficientes introducidos por Murnaghan y Littlewood como límites de ciertas sucesiones de coeficientes de Kronecker) para aumentar nuestro conocimientos sobre los coeficientes de Kronecker. Presentamos algunos resultados interesantes obtenidos utilizando ente enfoque, y hablamos en particular sobre un contraejemplo que hemos obtenido a una famosa conjetura de Mulmuley formulada en el contexto de su famoso programa para investigar el problema de P s NP.

Esta charla se basa en una serie de trabajos realizados en colaboración con Rosa Orellana y Emmanuel Briand.

m.h.rosas@gmail.com

Ponente: ERNESTO VALLEJO UNAM

Título: *Politopos de fila y columna*

Hora: (M4) mié18 12:10-12:50

Resumen: Trabajo conjunto con Pedro Sánchez (pdsanchez@gmail.com).

En esta plática aplicamos una generalización de la correspondencia RSK para matrices tridimensionales a la teoría de caracteres del grupo simétrico $S_n$. Dados dos caracteres irreducibles $\chi^\lambda$ y $\chi^\mu$ de $S_n$ obtenemos una descripción combinatoria de las multiplicidades $k(\lambda,\mu,\nu)$ de las componentes minimales $\chi^\nu$, con respecto al orden de dominación, del producto de Kronecker $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$. El coeficiente de Kronecker $k(\lambda,\mu,\nu)$ resulta, en este caso, ser el número de matrices tridimensionales con coeficientes enteros no negativos que satisfacen cierta familia de desigualdades lineales. Si en la familia de desigualdades lineales omitimos aquellas que involucran las partes de $\lambda$ y de $\mu$, obtenemos un politopo $P_{p,q}$ que solo depende de las longitudes $p$ y $q$ de las particiones $\lambda$ y $\mu$, respectivamente. Llamamos a los politopos así obtenidos de *fila y columna*. También presentamos, en el caso de $P_{n,n}$, un procedimiento para generar familias de vértices.

vallejo@matmor.unam.mx

Ponente: ALEJANDRO FLORES MÉNDEZ CINVESTAV

Título: *Gráficas Irreducibles y $\mathbb{B}$-Rees*

Hora: (M4) mié18 12:50-13:30

Resumen: Sea $U \subset V$. Si $e \cap U \neq \emptyset$ para toda $e \in E$, entonces a $U$ se le llama un transversal. Mediante $\tau(G)$ se denota la cardinalidad mínima de un transversal.

Si para todo $U \subset V$, $\tau(G[U]) + \tau\left(G\left[\overline{U}\right]\right) < \tau(G)$, entonces decimos que $G$ es *irreducible*.

En esta presentación, introducimos a las gráficas $\mathbb{B}$−Rees como aquellas cuyas únicas paralelizaciones irreducibles son subgráficas inducidas de la misma. Esto es, las gráficas $\mathbb{B}$−Rees son aquellas cuya álgebra de Rees simbólica es generada por monomios cuasi-libres de cuadrados. Las gráficas $\mathbb{B}$−Rees son cerradas bajo subgráficas inducidas. En este sentido, incluimos una familia infinita de subgráficas inducidas prohibidas junto con una operación para extenderlas. Esto es un primer paso hacia la caracterización de la familia de subgráficas prohibidas.

flores.mendez.alejandro@gmail.com

Ponente: PHILIPPE GIMÉNEZ U. Valladolid

Título: *Regularidad 3 en ideales asociados a grafos bipartitos*

Hora: (M4) mié18 13:30-14:10

Resumen: Trabajo conjunto con Óscar Fernández-Ramos (oscarf@agt.uva.es). Parcialmente financiado por el proyecto MTM2010-20279-C02-02 de MICINN, España.

Los ideales de grafos (*edge ideals*) cuya regularidad, en el sentido de Castelnuovo-Mumford, es 2 están caracterizados de manera combinatoria por el conocido resultado de Fröberg ([4]): el ideal $I_G \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ asociado a un grafo simple $G$ tiene regularidad 2 si y sólo si $G^c$, el grafo complementario de $G$, es cordal. Este resultado ha sido completado más tarde en [1] donde los autores determinan el primer paso $i_0$ de una resolución libre minimal graduada de $I_G$ en el que aparecen las sizigias no lineales cuando $G^c$ no es cordal, y en [2] donde se demuestra además que estas sizigias no lineales están concentradas en grado $i_0+3$ y se determina el correspondiente número de Betti $\beta_{i_0,i_0+3}$ en función de la combinatoria del grafo $G^c$. Estos resultados no pueden generalizarse para valores mayores de la regularidad dado que en este caso el valor de la regularidad puede depender de la característica del cuerpo ([5]) y por tanto no puede caracterizarse de manera combinatoria en función de los grafos $G$ o $G^c$.

En este trabajo no restringiremos a grafos $G$ que sean bipartitos. En este caso, caracterizaremos de forma combinatoria, los ideales $I_G$ de regularidad $\le 3$. Cuando la regularidad es al menos 4, determinaremos el primer paso $i_1$ de una resolución libre minimal graduada de $I_G$ en el que aparecen las sizigias de grado $\ge i_1+4$, demostraremos que estas sizigias están concentradas en grado $i_1+4$, y determinaremos el correspondiente número de Betti $\beta_{i_1,i_1+4}$ en función de la combinatoria del grafo $G^{bc}$, el complementario bipartito de $G$. Estos resultados forman parte de [3].

[1] D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek, and S. Popescu, *Restricting linear syzygies: algebra and geometry*, Compositio Mathematica **141** (2005), 1460-1478.

[2] O. Fernández-Ramos and P. Gimenez, *First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs*, Communications in Algebra **37** (2009), 1921-1933.

[3] ———, *Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs*, Preprint (2011).

[4] R. Fröberg, *On Stanley-Reisner rings*, In: Topics in algebra, Part 2 (Warsaw, 1988), Banach Center Publ. **26** (1990), 57-70.

[5] M. Katzman, *Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **113** (2006), 435-454.

[6] R.H. Villarreal, *Monomial algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 238, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

pgimenez@agt.uva.es