RSME-SMM-2012 17-20 ene 2012, Torremolinos

S08. Control y Optimización. SALA M2

Coordinada por: **Manuel González Burgos**, U. Sevilla; **Maxim Todorov**, U.Américas-Puebla.

PROGRAMA

mar17 18:00-18:40 →MERCEDES MARÍN BELTRÁN, U. Córdoba
Problemas de control óptimo para el tratamiento de tumores con quimioterapia.

mar17 18:40-19:20 →ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA, CINVESTAV
The linear programming approach to (stochastic) optimal control problems.

mar17 19:20-20:00 →FRANCISCO PERIAGO ESPARZA, U. Politécnica Cartagena
Relajación en problemas de diseño óptimo para la ecuación del calor.

mar17 20:00-20:40 →MAXIM IVANOV TODOROV, UDLAP
Motzkin representation of a class of closed convex sets.

mié18 11:30-12:10 →JAVIER FERNANDO ROSENBLUETH LAGUETTE, IIMAS-UNAM
Segundas variaciones negativas en control óptimo.

mié18 12:10-12:50 →CARLOS CASTRO BARBERO, U. Politécnica Madrid
Aproximación numérica del control puntual para la ecuación de ondas.

mié17 12:50-13:30 →JOSE LUIS MORALES, ITAM
On the improvement of first order methods for very large-scale optimization applications.

mié18 13:30-14:10 →MANUEL GONZÁLEZ BURGOS, U. Sevilla
Controllability of 2×2 *coupled parabolic systems.*

RESÚMENES

Ponente: MERCEDES MARÍN BELTRÁN U. Córdoba

Título: *Problemas de control óptimo para el tratamiento de tumores con quimioterapia*

Hora: (M2) mar17 18:00-18:40

Resumen: El presente trabajo, en colaboración con Carmen Calzada y Enrique Fernández-Cara, está financiado en parte por el proyecto MTM2010-15992 de DGES-MICINN (España).

El uso de medicamentos destinados a matar las células cancerosas (quimioterapia citotóxica) es una de las opciones más utilizadas en el tratamiento de tumores malignos.

A diferencia de otros tratamientos (radioterapia o cirugía) la quimioterapia afecta no sólo al tumor sino también a tejidos sanos. La concentración y el tiempo de administración del medicamento determinan su grado de toxicidad. Es importante diseñar protocolos que permitan eliminar el mayor número de células cancerosas sin que resulten perjudiciales para el paciente. La forma de determinar estos protocolos se basa en la realización de ensayos clínicos lo que da lugar a procesos que suelen ser largos y de un coste muy elevado. En este sentido, el uso de modelos matemáticos y de técnicas de control óptimo proporciona un método de bajo costo que permite probar diferentes estrategias de manera más eficiente.

En este trabajo, presentamos un problemas de control óptimo en el que el se considera el crecimiento de un tumor necrótico al cual se le administra un único medicamento quimioterapeútico.

Para describir el crecimiento del tumor se considera un modelo heterogéneo en espacio y tiempo formulado como un problema de frontera libre que se expresa mediante ecuaciones en derivadas parciales [1]. Para describir de qué forma llega el medicamento al tumor, suponemos que éste se administra mediante infusiones intravenosas, mezclándose de forma inmediata con el plasma sanguíneo y que esta mezcla llega también de forma inmediata al tumor con una concentración, en general, no homogénea en espacio.

El estado viene dado por una función que mide el tamaño del tumor y el control es una dato asociado a la elección de la estrategia de la terapia. Se imponen una serie de restricciones que previenen los efectos tóxicos del medicamento.

Presentamos los resultados obtenidos cuando se considera la administración de doxorrubicina, un citotóxico que suele emplearse en quimioterapia. Efectuamos una serie de tests que nos permiten validar el modelo de terapia propuesto comparando con resultados experimentales conocidos [3]. Mostraremos los protocolos de administración óptimos obtenidos, con nuestro modelo, en diferentes situaciones [2].

[1] MC. Calzada, G. Camacho, E. Fernández-Cara, and M. Marín, *Fictitious domains and level sets for moving boundary problems. Applications to the numerical simulation of tumor growth*, Journal of Computational Physics **230** (2011), no. 4, 1335-1358.

[2] MC. Calzada, E. Fernández-Cara, and M. Marín, *On the control of some tumor growth models oriented to therapy*, En preparación.

[3] TL. Jackson, *Intracellular accumulation and mechanism of action of doxorubicin in a spatio-temporal tumor model*, Journal of Theoretical Biology **220** (2003), no. 4, 201-213.

ma1mabem@uco.es

Ponente: ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA CINVESTAV

Título: *The linear programming approach to (stochastic) optimal control problems*

Hora: (M2) mar17 18:40-19:20

Resumen: Consider an optimal control problem (OCP) with an objective function $J(\pi)$ over a given set Π of control strategies π. At the outset, for an OCP there is no topological nor algebraic information at all.

In the linear programming (LP) approach to OCP one tries to express the OCP as a primal linear program, say P, on suitable (usually, infinite–dimensional) vector spaces. Then, under quite general hypotheses, one can show that the values of P and its dual P^* (i.e., inf P and sup P^*) satisfy that

$$\sup P^* \le \inf_{\pi\in\Pi} J(\pi) \le \inf P.$$

Therefore, if there is no duality gap, so that $\sup P^* = \inf P$, we obtain the value of the OCP. If in addition either P or P^* is solvable, we can obtain an optimal strategy for OCP. It is interesting to note that the dual program P^* gives the *dynamic programming equation* for the OCP.

ohernand@math.cinvestav.mx

Ponente: FRANCISCO PERIAGO ESPARZA U. Politécnica Cartagena

Título: *Relajación en problemas de diseño óptimo para la ecuación del calor*

Hora: (M2) mar17 19:20-20:00

Resumen: El objetivo principal de la presentación será ofrecer una perspectiva general de los trabajos de investigación realizados en los últimos años por nuestro grupo en torno a ciertos problemas de diseño óptimo para la ecuación del calor. De manera concreta, presentaremos los dos problemas siguientes:

- *Diseño de un material isotrópico con dos fases que minimiza la energía termal disipada.* Básicamente, se trata de encontrar la distribución óptima de dos materiales diferentes que minimiza la energía disipada. En términos matemáticos, el problema adopta la forma

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } \mathscr{X}: & J(\mathscr{X}) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega K(x)\nabla u\cdot\nabla u\, dx\, dt \\ \text{sujeto a} & \\ & \beta(x)\, u_t - \operatorname{div}\,(K(x)\nabla u) = f(x), \quad \text{en} \quad Q \\ & u = 0, \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ & u(0) = u_0, \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \beta(x) = \mathscr{X}(x)\,\beta_1 + (1-\mathscr{X}(x))\,\beta_2, \\ K(x) = \mathscr{X}(x)\, k_1 I_N + (1-\mathscr{X}(x))\, k_2 I_N \end{cases}$$

y la variable de diseño $\mathscr{X} \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})$ cumple la restricción de volumen

$$\int_\Omega \mathscr{X}(x)\, dx = L|\Omega| \quad \text{para algún } 0<L<1 \text{ fijo.}$$

Como de costumbre, $T>0$ es un tiempo fijo, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\ge 1$, es un dominio acotado compuesto de dos materiales homogéneos e isotrópicos con densidades de masa $\rho_i > 0$, calores específicos $c_i > 0$, y conductividades térmicas $k_i > 0$, $i = 1,2$, con $k_1 \ne k_2$. $Q = \Omega\times(0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega\times(0,T)$, I_N denota la matriz identidad de orden N, f es una fuente de calor, u_0 la temperatura inicial, y $u(x,t)$ la temperatura en tiempo t y posición x. La variable de diseño $\mathscr{X}$ indica la región ocupada por uno de los dos materiales.

- *Diseño óptimo del soporte del control nulo para la ecuación del calor.* Con la misma notación que en el problema anterior, consideremos el problema de encontrar un control $v = v(x,t)$ de forma que la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v 1_\omega & \text{en} \quad Q \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

cumpla la condición de controlabilidad nula

$$u(x,T) = 0, \quad x\in\Omega. \tag{2}$$

En este problema, $\omega\subset\Omega$ es un dominio "pequeño" donde actúa el control. Obviamente, la solución v del problema anterior depende de ω, es decir, $v = v(\omega)$. El problema de diseño que planteamos es encontrar el mejor ω de entre todos aquellos que tienen el mismo tamaño. En términos matemáticos

$$\begin{cases} \text{Minimizar en } 1_\omega: & J(1_\omega) = \|v\| \\ \text{sujeto a} & \\ & v \text{ satisface (1)-(2),} \\ & 1_\omega \in L^\infty(\Omega;\{0,1\}) \\ & |\omega| = L|\Omega|. \end{cases}$$

En este problema, $\|\cdot\|$ es una norma. En concreto, analizaremos los casos de la norma L^2 y L^∞. Esta última conduce a controles tipo bang-bang.

En ambos problemas, la variable de diseño es binaria lo que fuerza a que los problemas sean no convexos. Aparece entonces de forma natural el problema de no existencia de solución. Presentaremos las técnicas usuales de relajación que permiten dar un sentido a lo que podríamos llamar una solución generalizada y, sobre todo, entender el comportamiento de (algunas de) las sucesiones minimizantes del problema original. Finalmente, veremos también cómo la relajación puede ser usada para resolver numéricamente los dos problemas anteriores.
Los resultados originales presentados han sido obtenidos en colaboración con G. Allaire, A. Münch y P. Pedregal.

[1] G. Allaire, A. Münch, and F. Periago, *Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), no. 8, 5333-5356.

[2] A. Münch, P. Pedregal, and F. Periago, *Relaxation of an optimal design problem for the heat equation*, J. Math. Pures Appl. **89** (2008), no. 9, 225-247.

[3] A. Münch and F. Periago, *Optimal distribution of the internal null control for the one-dimensional heat equation.*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 1, 95-111.

[4] ______, *On a time-dependent optimal design problem for the heat equation*, En preparación.

f.periago@upct.es

Ponente: Maxim Ivanov TODOROV UDLAP

Título: *Motzkin representation of a class of closed convex sets*

Hora: (M2) mar17 20:00-20:40

Resumen: A subset of a finite dimensional space is called Motzkin decomposable when it can be expressed as the Minkowski sum of a compact convex set with a closed convex cone. In this talk we present some properties of these sets and necessary and sufficient conditions for such kind of decomposition. The continuity properties of the set-valued mapping associating to each couple, formed by a compact convex set C and a closed convex cone D, its Minkowski sum $C+D$ have been analyzed, as well.

maxim.todorov@udlap.mx

Ponente: Javier Fernando ROSENBLUETH LAGUETTE IIMAS-UNAM

Título: *Segundas variaciones negativas en control óptimo*

Hora: (M2) mié18 11:30-12:10

Resumen: En esta plática hablaremos de algunos aspectos fundamentales que surgen al tratar de obtener condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden para ciertos problemas de control óptimo que involucran igualdades y desigualdades en la función de control. Específicamente, para la clase de problemas que estudiaremos, el objetivo es minimizar una funcional del tipo

$$I(x,u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))\,dt$$

sobre procesos (x,u) con $x\colon T\to\mathbf{R}^n$ de clase C^1 por fragmentos y $u\colon T\to\mathbf{R}^m$ continua por fragmentos, y sujeta a las restricciones

a. $\dot x(t) = f(t,x(t),u(t))$ $(t\in T)$, $x(t_0)=\xi_0$, $x(t_1)=\xi_1$;

b. $\varphi_\alpha(u(t))\le 0$, $\varphi_\beta(u(t))=0$ $(\alpha\in R,\ \beta\in Q,\ t\in T)$,

donde $T=[t_0,t_1]$, $\xi_0,\xi_1\in\mathbf{R}^n$ son fijos, $R=\{1,\dots,r\}$ y $Q=\{r+1,\dots,q\}$.

En particular nos interesa encontrar condiciones que permitan asegurar que la segunda variación de la funcional I, expresada en términos del Hamiltoniano

$$H(t,x,u,p,\mu) = \langle p, f(t,x,u)\rangle - L(t,x,u) - \langle \mu,\varphi(u)\rangle,$$

sea no negativa en ciertos conos convexos definidos por las restricciones. Presentaremos tres conos (de variaciones admisibles) que surgen de manera natural aplicando el principio máximo y veremos ejemplos en los que la segunda variación de un proceso admisible, aun satisfaciendo el proceso ciertas hipótesis de normalidad y regularidad, puede ser estrictamente negativa en dichos conjuntos.

jfrl@unam.mx

Ponente: Carlos CASTRO BARBERO U. Politécnica Madrid

Título: *Aproximación numérica del control puntual para la ecuación de ondas*

Hora: (M2) mié18 12:10-12:50

Resumen: Consideramos la ecuación de ondas unidimensional en un intervalo finito $(0,L)$, sobre la que actúa un control localizado en un punto interior que sigue una trayectoria dada por una función $\gamma(t)$. El sistema de ecuaciones que describe este problema viene dado por,

$$\text{(3)}\qquad \left\{\begin{array}{lll} u_{tt}-u_{xx}=f(t)\delta_{\gamma(t)}(x), & \text{en} & 0<x<L,\quad 0<t<T,\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & \text{in} & \qquad\qquad\quad 0<t<T,\\ u(x,0)=u^0(x),\ u_t(x,0)=u^1(x) & \text{en} & 0<x<L. \end{array}\right.$$

donde, $\delta_{\gamma(t)}$ representa la masa de Dirac con soporte en $x=\gamma(t)$. Supondremos que la función $\gamma:[0,T]\to(0,L)$ es C^1 a trozos.
El problema de control exacto para el sistema anterior se plantea de la siguiente manera: *Dado $T>0$, unos datos iniciales (u^0,u^1) y datos finales (v^0,v^1), encontrar un control f tal que la solución u de (3) satisfaga*

$$u(x,T)=v^0(x),\qquad u_t(x,T)=v^1(x),\qquad \forall x\in(0,L). \tag{4}$$

Los problema de control puntual móvil fueron introducidos por J.-L. Lions y han sido tratados por diversos autores tanto para la ecuación de ondas como el calor (ver por ejemplo [5], [4], [3] y las referencias incluidas).
Para la ecuación de ondas, se sabe que bajo ciertas hipótesis sobre la curva γ el problema de control exacto planteado tiene solución (ver [1] y [4]). En esta presentación nos centraremos en la aproximación numérica de este control. Para ello plantearemos una discretización del problema basada en una aproximación por elementos finitos mixtos de la ecuación de ondas (ver [2] donde se estudia el control frontera). Con ello se evitan los fenómenos de concentración de ondas discretas espúreas que aparecen en las aproximaciones clásicas por diferencias finitas o elementos finitos, y que hacen que estos esquemas discretos proporcionen controles que no son aproximaciones de los controles continuos.
Estudiaremos la controlabilidad del problema discreto y mostraremos ejemplos numéricos para diversas trayectorias γ.

[1] C. Castro, *Exact controllability of the 1-d wave equation from a moving interior point*, preprint.

[2] C. Castro and S. Micu, *Boundary controllability of a linear semi-discrete* 1*-D wave equation derived from a mixed finite element method*, Numer. Math. **102** (2006), 413-462.

[3] C. Castro and E. Zuazua, *Unique continuation and control for the heat equation from a lower dimensional manifold*, SIAM J. Cont. Optim **42** (2004), no. 4, 1400-1434.

[4] A. Khapalov, *Controllability of the wave equation with moving point control*, Applied Mathematics and Optimization **31** (1995), no. 2, 155-175.

[5] J.-L. Lions, *Pointwise control for distributed systems*, Control and estimation in distributed parameter systems, edited by H.T. Banks, SIAM (1992).

carlos.castro@upm.es

Ponente: JOSE LUIS MORALES ITAM

Título: *On the improvement of first order methods for very large-scale optimization applications*

Hora: (M2) mié17 12:50-13:30

Resumen: Constraints in computational resources and precision make first order methods the only possible choice to solve many very large-scale problems. In this talk we show how to improve first order methods for box constrained optimization problems by combining them with carefully designed subspace minimization phases. Overall, the combination improves the rate of convergence and the identification of the active set at the solution. We also show that implementation issues play a key role in performance. The techniques are illustrated in several applications.

jlmp.morales@gmail.com

Ponente: MANUEL GONZÁLEZ BURGOS U. Sevilla

Título: *Controllability of* 2×2 *coupled parabolic systems*

Hora: (M2) mié18 13:30-14:10

Resumen: Joint work with F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, and L. de Teresa.
In this talk we will present some null controllability results for the system

$$\left\{\begin{array}{ll} y_t-\Delta y=v1_\omega,\quad q_t-\Delta q=y1_{\mathcal{O}} & \text{in } Q=\Omega\times(0,T),\\ y=0 \text{ on } \Sigma=\partial\Omega\times(0,T), & y(\cdot,0)=y_0 \text{ in } \Omega,\\ q=0 \text{ on } \Sigma, & q(\cdot,0)=q_0 \text{ in } \Omega, \end{array}\right. \tag{5}$$

posed in a regular bounded domain $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. In (5), $T>0$ is a final time, 1_ω and $1_{\mathcal{O}}$ denote respectively the characteristic functions of the open subsets $\omega\subseteq\Omega$ and $\mathcal{O}\subseteq\Omega$, $y_0,q_0\in L^2(\Omega)$ are given, $y=y(x,t)$ is the state and $v=v(x,t)$ is the control function (which acts only in the first equation).
When $\omega\cap\mathcal{O}\neq\emptyset$ it is by now well known that (5) is null controllable at time $T>0$ (see [1,4,6]), i.e., for every $y_0,q_0\in L^2(\Omega)$ there is $v\in L^2(Q)$ such that the solution to (5) satisfies $y(\cdot,T)=q(\cdot,T)=0$ in Ω.
When $\omega\cap\mathcal{O}=\emptyset$ it is also known that system (5) is approximate controllable at time $T>0$ (see [5]), i.e., for every $y_0,q_0,y_d,q_d\in L^2(\Omega)$ and $\varepsilon>0$ there is $v\in L^2(Q)$ such that the solution to (5) satisfies

$$\|y(\cdot,T)-y_d\|_{L^2(\Omega)}+\|q(\cdot,T)-q_d\|_{L^2(\Omega)}\le\varepsilon.$$

In this talk we will present a recent result of null controllability at time T of system (5) in the case $N=1$, $\Omega=(0,\pi)$ (for instance) and $\omega\cap\mathcal{O}=\emptyset$. We will obtain the controllability result for (5) as a consequence of a general boundary null controllability result for the 2×2 coupled system

$$\left\{\begin{array}{ll} y_t-y_{xx}=q(x)A_0y & \text{in } Q:=(0,\pi)\times(0,T),\\ y(0,\cdot)=Bv,\quad y(\pi,\cdot)=0 & \text{on } (0,T),\\ y(\cdot,0)=y_0, & \text{in } (0,\pi), \end{array}\right. \tag{6}$$

where $y=(y_1,y_2)$ is the state, $v\in L^2(0,T)$ is the control (one **boundary** control) and $y_0\in L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$ is the initial datum. In (6), $q\in L^\infty(0,\pi)$, $B=(b_1,b_2)^*\in\mathbb{R}^2$ and

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

are given (in (5), we have a **distributed** control v, $q=1_{\mathcal{O}}$ and $B=(1,0)^*$).
We will use some results from [3] and [2].

[1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and I. Kostin, *Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **11** (2005), no. 3, 426–448.

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials*, J. Math. Pures Appl. **96** (2011), no. 6, 555–590.

[3] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *Boundary controllability of parabolic coupled equations*, J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 7, 1720–1758.

[4] M. González-Burgos and R. Pérez-García, *Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force*, Asymptot. Anal. **46** (2006), no. 2, 123–162.

[5] O. Kavian and L. de Teresa, *Unique continuation principle for systems of parabolic equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 2, 247–274.

[6] L. de Teresa, *Insensitizing controls for a semilinear heat equation*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), no. 1-2, 39–72.

manoloburgos@us.es